

令和 3 年 6 月 4 日現在

機関番号：34416

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14211

研究課題名(和文) 数論的力学系の視点による離散および超離散可積分系に関する研究

研究課題名(英文) Discrete and Ultradiscrete integrable systems in terms of the theory of number theoretic dynamical systems

研究代表者

神吉 雅崇 (KANKI, Masataka)

関西大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：20755897

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、離散力学系の数論的・代数学的な構造の研究により、可積分性の指標を精密化した。

指標の精密化によって、多次元格子系や、整数論的基礎体上の方程式の可積分性とは何かを探求すると同時に既知のクラスに該当しない新しい可積分系を構成することができた。構成された新種の方程式系の研究は離散力学系のみならず、超離散化の手法の再考を通じて、セルオートマトンを利用した数理物理学分野に新たな見地をもたらすと期待される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

可積分系の研究には長い歴史があるが、離散系における可積分性についての厳密な取り扱いが発展途上である。本研究はこのテーマについて、従来の方程式を拡張した系に適用できる新しい可積分性判定基準として「互いに素条件」を導入した。

またこれらの基準の意味するところを、既知の判定基準と比較検討することで一見単純に思えるが難しい漸化式の世界の複雑さを解き明かすための準備となる研究を行うことができた。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research is to rigorously re-define the integrability of discrete dynamical systems through the study of the algebraic and the number theoretic aspects of difference equations.

An elaboration on the integrability criteria helps us to define the "integrability" of multi-dimensional lattice systems and the systems defined over a number theoretic field. We have defined several new types of difference equations, which are considered to be "partially" integrable in terms of our integrability criterion called the "co-primeness" condition.

We expect that this study leads us to a novel perspective in the field of integrable systems and mathematical physics.

研究分野：大域解析学

キーワード：可積分系 漸化式 超離散系 力学系

## 1. 研究開始当初の背景

可積分系とは、主に非線形でありながらも求積法により厳密解が記述できる方程式のクラスの総称であり多彩な興味深い数学的性質を持っている。例えば浅水波モデルである KdV 方程式における、相互作用によって形を変えない「ソリトン解」の存在や、変換群のアフィンワイル群対称性などである。可積分系は従来、連続系(微分方程式系)について詳細に研究がなされており、常微分方程式系においては形式的ベキ級数の存在を用いたパンルヴェ・テストと呼ばれる可積分性判定基準がある。ハミルトン力学系には Liouville-Arnold 可積分性という厳密な定義がある。

一方、離散方程式の可積分性については、統一された定義が存在せず、いくつかの経験則によって判断されているという背景がある。本研究の目的は離散力学系の数論的・代数学的な構造の研究により、可積分性の指標を精密化するとともに、数理モデルに有用な力学系の構成を行うことであった。指標の精密化によって、多次元格子や、整数論的基礎体上の方程式の可積分性とは何かを探求すると同時に既知のクラスに該当しない新しい可積分系を構成することも目標として研究を行った。構成された新種の方程式系の研究は離散力学系のみならず、超離散化の手法の再考を通じて、セルオートマトンを利用した数理物理学分野に新たな見地をもたらすと期待されるため積極的に新しい方程式の探索を行った。

## 2. 研究の目的

近年では可積分系の離散化(差分化)・超離散化の研究が盛んである。この両者について研究を深めることが目的である。

(1) まず、離散化については、連続系の性質を保存する数値計算スキームの研究に始まり、離散 KP 階層に代表される離散系そのものの構造が注目された。研究の進展に伴い、離散力学系にも微分方程式の可積分性と同様の性質を特徴付ける各種の判断基準が発見されてきた。例えば A. Ramani 氏らは「特異点閉じ込めテスト (singularity confinement test)」に通ることが可積分性であると提唱した。M. Bellon 氏らは写像の合成による次数の増大度が多項式程度に小さければ可積分であると判定する「代数的エントロピーの手法」を提唱した。特異点閉じ込めと代数的エントロピーは共に、非常に有用であるものの、2 基準が互いに矛盾するような写像も数多く存在し、統合的な理解が進んでいない状況である。このため、離散系が可積分であることをどう定義すべきかが興味深い研究テーマとなってきた。本研究は、方程式の各項の共通因子の出現頻度、整数論的な基礎体上での項の因数分解パターンといった、代数学的な知見を応用することにより、統一的な判定基準を構成することを目指す。これにより判定基準同士の矛盾を解消し、離散系の複雑さについての理解を深めることが期待される。

(2) 次に、超離散化については、離散力学系の従属変数を、超離散化によって、整数値のみをとらせる操作である。超離散化は、突出した量を抽出するような非線形な極限操作であり、離散系のソリトン解などの重要な情報を保持したセルオートマトンの構成に有用である。ただし適用できる方程式の形に制限があるため、本研究では  $p$  進数体など整数論の見地を用いて超離散化のより広範な適用のための研究を行いたい。

## 3. 研究の方法

(1) 離散力学系の可積分性判定が経験則に依っているという背景のもと、離散力学系の可積分性について精密な判定基準を構成するという目的で研究を行う。環論的な方針(共通因子の出現頻度を定式化した co-prime 条件に関する研究)および、整数論的な方針(方程式の有理数体上での発展の複雑さに関する Diophantine 可積分性の研究)を両輪として研究を進める。

(2) 上記 2 つの数学的研究の補助として、様々な方程式での数値計算を行い統合的な可積分性の定義に関する予想を立てる。環論的な方針によって予想を証明し、co-prime 条件のさらなる精密化を行う。整数論的な側面では、カオス解を持つ方程式群について、また Diophantine エントロピーについて、co-prime 条件との共通点および差異について研究する。

(3) 構成した離散可積分性判定基準が、あるクラスの方程式について妥当な判定基準とみなされない可能性が考えられる。そのような場合は、互いに素がどうかのみでなく、特定の共通因子についての出現回数・出現する共通因子の次数の増大度・出現する項の数の測定、特定の因子で

局所化した環上の力学系としての分析、などの手法を取り研究を継続する。これにより判定基準を精密化することが期待できる。

#### 4. 研究成果

(1) 研究機関の初年度については、離散力学系について、その一般項の因数分解を詳細に分析することで特異点構造を把握し、数値計算によって立てた予想を証明するという流れで研究を進めた。

非線形の高次元力学系の発展は非常に多くの項を含むため、不定元を残しての数値計算は、数値計算の必要時間を鑑みると現実的に不可能である。

このため、一部の独立変数を適切な有理数に置き換えることで計算を早めることを試みた。そのため Diophantine integrability の考え方により、有理数の複雑さの指標である高さ (height) が、従来の代数的エントロピーの整数論的類似物であることを用いて、複数の離散方程式 (Hietarinta-Viallet 方程式の一般化・多次元化を含む) に関して、代数的エントロピーの近似値に関する数値計算を行った。

(2) 研究期間の2年目は、初年度の上記に記載したような数値実験結果を基にして、方程式の特異点の構造および互いに素条件の成立・不成立を予測することができた。

結果として、2次元離散戸田方程式の高次元格子系への拡張系に関する互いに素条件の定式化と証明について Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical から論文を発表することができた。また、同じく2次元離散戸田方程式の拡張系に関して、非線形形式を定義することができ、これについても互いに素条件を証明することができた。

さらに、方程式そのものが既約でない場合においても、既約性を無視して互いに素条件を適切に設定することで証明できるという結果に関して Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 誌から論文を発表することができた。

(3) 研究期間の3年目には、各種の離散力学系の調査を行い、これらに関して、特に互いに素条件をもつ高次元の離散力学系を離散 KdV 方程式の拡張を基本として導入することができた。

離散 KdV 方程式の指数を正整数におきかえることで得られる非可積分な拡張系については、以前の我々の論文においてすでに互いに素条件が証明されている。

本年度はこの方程式系を高次元の整数格子系への方程式へと拡張することを試み、実際に、互いに素条件を保ったまま、任意の次元の格子系を定義することができた。

さらに、得られた系はその形より Hietarinta-Viallet 方程式の高次元類似物と予想された。

ここで、Hietarinta-Viallet 方程式は、離散力学系であって、次数増大が指数的であるという意味で非可積分であるものの、特異点閉じ込めテストに通る系として導入されたもので、その類似物や拡張は非可積分力学系分野で近年注目を浴びているものである。

実際に調べたところ、この方程式は低次元格子系への reduction を行うことによって確かに Hietarinta-Viallet 方程式の多項間漸化式への拡張となっていることが判明した。

また、その方程式に対して代数的エントロピーが系の「特性多項式」の最大の実根であることを証明することができた。

(4) 研究最終年度においては、離散可積分系の離散幾何学的な側面、および超離散力学系との対応を研究した。

有限体あるいは  $p$  進数体の上で定義された離散力学系を、特異点で blowing-up を行うことで初期値空間の構成を試みた。

また、超離散力学系についての研究を再開し、結晶基底およびヤング盤との対応などの表現論的側面について理論の精密化を試み、箱玉系の拡張系として知られる様々なシステムを比較検討した。

これらの研究成果は、この年度の研究者の多くに言えることではあるが、感染症対策などの大学業務により十分な時間が取れなかったこともあり、論文にまとめる段階には至らなかった。しかしながら、得られた研究データは、従来の手法で初期値空間が作れなかった写像 (偏差分方程式系) や blowing-up の回数が非常に多いために、解析が困難であった写像 (Hietarinta-Viallet 方程式の拡張系、および、線形化可能系のクラス) への応用が期待できる。

この年度中の発表実績としては、ある多項間の漸化式によって定義される写像が、Hietarinta-Viallet 方程式の拡張系であることを見出し、その写像の代数的エントロピー (写像の複

雑さを表す指標であり、値が大きいほど写像は複雑であると考えられる)を導出し、成果をオンライン学会にて発表した。

また、互いに素条件(coprimeness-condition)を持つ写像と対応するセルオートマトン(Cellular Automata)の性質を調べた。これらのセルオートマトンは離散系と類似した性質を持つので、「可積分」および「準可積分」なセルオートマトンの分類および発見に役立つと期待される。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 神吉雅崇	4. 巻 674
2. 論文標題 可積分性判定	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 神吉雅崇, 時弘哲治, 間瀬崇史	4. 巻 2071
2. 論文標題 多次元格子上の擬似可積分系	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 17-39
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kanki Masataka, Mase Takafumi, Tokihiro Tetsuji	4. 巻 14
2. 論文標題 On the Coprimeness Property of Discrete Systems without the Irreducibility Condition	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3842/SIGMA.2018.065	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kamiya Ryo, Kanki Masataka, Mase Takafumi, Okubo Naoto, Tokihiro Tetsuji	4. 巻 51
2. 論文標題 Toda type equations over multi-dimensional lattices	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 364002 ~ 364002
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/aad375	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kamiya Ryo, Kanki Masataka, Mase Takafumi, Tokihiro Tetsuji	4. 巻 51
2. 論文標題 Nonlinear forms of coprimeness preserving extensions to the Somos-4 recurrence and the two-dimensional Toda lattice equation? investigation into their extended Laurent properties	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 355202 ~ 355202
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/aad074	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryo Kamiya, Masataka Kanki, Takafumi Mase, Tetsuji Tokihiro	4. 巻 51
2. 論文標題 A two-dimensional lattice equation as an extension of the Heideman-Hogan recurrence	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/aaad47	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計8件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 神吉雅崇
2. 発表標題 ある多項間漸化式の代数的エントロピーについて
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masataka Kanki
2. 発表標題 Coprimenesspreserving extensions to discrete integrable systems
3. 学会等名 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masataka Kanki
2. 発表標題 Coprime property of the Toda type equations over multi-dimensional lattices
3. 学会等名 Symmetry and Integrability of Difference Equations 13 in Fukuoka (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 神吉雅崇
2. 発表標題 離散可積分性判定と互いに素条件
3. 学会等名 可積分系理論から見える数値構造とその応用 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 神吉雅崇
2. 発表標題 漸化式と互いに素条件
3. 学会等名 2018年度函数方程式論サマ－セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 神谷 亮、神吉 雅崇、時弘 哲治、間瀬 崇史
2. 発表標題 疑似可積分性をもつ離散方程式
3. 学会等名 日本応用数理学会年会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 神吉 雅崇
2. 発表標題 離散力学系の可積分性判定について-線形化可能系を中心に-
3. 学会等名 数理科学の拡がり：可積分系・数理医学
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 神吉 雅崇
2. 発表標題 離散可積分系の判定手法について
3. 学会等名 函数方程式論サマーセミナー
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関