

令和 4 年 5 月 24 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14215

研究課題名(和文)非圧縮粘性流の漸近形状と入力データの相関についての数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis for the interaction between the asymptotic profile and the input data for the incompressible viscous flow

研究代表者

岡部 考宏 (Okabe, Takahiro)

大阪大学・基礎工学研究科・講師

研究者番号：00626872

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：非圧縮粘性流体の運動を記述する非圧縮ナビエ・ストークス方程式の解の時間大域的挙動について、解の漸近展開及び漸近形の入力データによる制御について研究を行なった。特に2次元全空間上のナビエ・ストークス方程式の解の漸近展開や、全空間上の弱ルベグ空間における同方程式の可解性と一意性について考察を行なった。また、外力の作用により、非線形項を制御することで、一次の漸近形よりも速いエネルギー減衰を導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非圧縮ナビエ・ストークス方程式の解の時間挙動の解析は、数学解析のみならず、実際の流体の運動の制御に直結し工学的な応用の点からも重要である。特に流体の非線形現象の解明が、流体の運動の制御において課題である。本研究では、外力の作用に着目して、その非線形項への直接的な作用を考察し、非線形項のもつ一次の減衰オーダーよりも速い減衰を導出することに成功した。これらの研究成果は、流体の運動制御の観点からも意義深いといえる。

研究成果の概要(英文)：We investigate the long time behavior of the solution of the incompressible Navier-Stokes equations, which describes the motion of the incompressible viscous fluid from the viewpoint of asymptotic expansion of the solution and the control of the leading order terms by initial data and external forces. Especially, we derived the asymptotic expansion for the Navier-Stokes flow in the 2D whole plane, and considered the strong solvability and the uniqueness for the Navier-Stokes equations in the weak Lebesgue space. Furthermore, controlling the nonlinear terms by the action of the external forces, we derive faster energy-decay than that of the first leading order terms.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：ナビエ・ストークス方程式 漸近展開 ハーディー空間 弱ルベグ空間 エネルギー減衰 時間周期解

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

一般に、大気や水などの非圧縮粘性流体の運動はナビエ・ストークス方程式により記述される。これらの「流れ」の解析に加えてその制御などは、実用上重大な課題であるにも関わらず、同方程式における解の一意性や正則性といった基本的な性質が未だ完全には解決されていない。特に「乱流」状態と思われる、初期値や外力が十分大きい場合、滑らかな解の一意的存在は未解決である。そこで、方程式の非線形構造の数学解析により、非圧縮粘性流体の本質的な長時間挙動を方程式と初期値及び外力の関係のみから解明する。

非圧縮粘性流体の運動エネルギーは、外力によるエネルギー注入がなければ、粘性により散逸していくことが物理的に自然である。運動エネルギー減衰の数学解析においては、特に領域が非有界の場合に、本質的に非線形項の挙動の解析が必要な問題である。この問題については、非線形項の挙動を線形ストークス流により制御することで、エネルギーの時間多項式減衰とその最良減衰指数が知られている。しかしながら、線形ストークス流による非線形項の制御では、この最良減衰指数よりも速い減衰を導出することが不可能であった。実際、この最良減衰指数は、非線形項固有の減衰オーダーであることが後に明らかにされた。特に、Fujigaki-Miyakawa (SIAM J. Math. Anal., 2001) は、解の漸近展開を行い、解の線形項及び非線形項のそれぞれの主要部(漸近形状)の特徴付けに成功している。Miyakawa-Schonbek (Math. Bohem., 2001) においては、一次漸近系よりも速い減衰を得るための(非線形項の)必要十分条件が得られており、速度場の積分量の対称性という定性的解析が本質的であるということが明らかにされた。しかし、一般に、非線形偏微分方程式の解を具体的に求めることは事実上不可能であり、未知関数である解に対して、定性的な情報を得ることは非常に困難であった。

2. 研究の目的

(1) 漸近展開による解の主要項の決定と入力データの影響の解析

Fujigaki-Miyakawa (SIAM J. Math. Anal., 2001) は、全空間上の斉次ナビエ・ストークス方程式に対して、解の漸近展開を行い、熱核の導関数で構成される主要部(漸近形状)の特徴付けに成功した。これにより、非線形項は固有の減衰指数を持つことが解明され、非線形項の制御、特に固有の減衰指数よりも速い減衰を得るためには、速度場の積分量(mass)の定性的解析が本質的であるという新しい視点が得られた。実際、この観点から、Brandolese (C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 2001) は、速度場に対し、巡回群の作用による巡回対称性(cyclic symmetry)を導入することで、非線形項の主要項の制御に成功し、速い減衰を得ている。

以上から、速度場の積分量の定性的な解析が非線形項の挙動を知る上での鍵となることがわかる。しかしながら、これまでの研究では、巡回対称性を用いた手法しか確立されていない。また、初期値のモーメントと外力の積分平均(mass)が線形の非斉次ストークス流の制御に明示的に現れることと対比すると、非線形項に対するデータの影響は直接的には知られていない。そこで、速い減衰の為の必要条件の解明と初期値や外力などの入力データの速度場への影響を明示的に解明することが目標である。

(2) 空間特異性を許容する関数空間における解の正則性について

ルベグ空間やソボレフ空間における非圧縮ナビエ・ストークス方程式の初期値問題の適切性、すなわち、解の存在、一意性及び初期値に対する連続性については、これまで抽象発展方程式の枠組みに基づく Fujita-Kato の手法により多くの研究がなされてきた。同手法においてはストークス半群が解析的な強連続半群となることが重要な役割を果たしている。

一方、弱ルベグ空間は、-1 次の斉次関数や基本解を含み、空間特異性や空間遠方の臨界減衰を許容するような広い空間である。そのため、弱ルベグ空間においては、コンパクト台を持つような滑らかな関数全体が稠密でなく、また、ストークス半群が時間 $t=0$ で強連続とならないことが知られている。このため、抽象発展方程式として時間 t についての微分方程式を満たすかということと、時間局所解の存在を保証することが課題であり、外力がある場合についてこれらの考察を行う。

3. 研究の方法

(1) 漸近展開による解の主要項の決定と入力データの影響の解析

全空間上の非圧縮ナビエ・ストークス方程式においては、Fujigaki-Miyakawa (SIAM J. Math. Anal., 2001) によって解の漸近展開が導出されており、Miyakawa-Schonbek (Math. Bohem., 2001) により一次の主要項よりも速く減衰するための必要十分条件が明らかにされている。この条件のため、従来は特殊な対称性を持つ流れの範疇で速い減衰が考えられてきた。そこで本研究では、外力の作用を導入し、必ずしも対称とは限らない一般の流れに対して速い減衰を導出す

る。

(2) 空間特異性を許容する関数空間における解の正則性について

全空間上の非圧縮ナビエ・ストークス方程式の初期値問題の可解性、一意性、時間周期解の存在を弱ルベグ空間の枠組みにより考察する。特に実解析的な手法により外力項及び非線形項の評価を行い、抽象発展方程式として時間 t の微分方程式を満たす解を構成する。

4. 研究成果

(1) 外力による漸近解析

全空間上の非圧縮ナビエ・ストークス方程式の解のエネルギー減衰について考察し、本研究では、Brandolese 氏との共同研究として、巡回対称性に代わる作用として外力を採用し、外力により非線形項を直接制御することを試みた。この結果により、任意の(小さな)初期速度に対して、外力を定めることができ、非線形項の遅い減衰成分を消滅させることが可能となった。これにより、必ずしも対称性を持たない流れに対しても、線形項と非線形項の非自明な相互作用により、速い減衰が起こり得ることが示唆されている。さらに目的の外力は時間・空間においてコンパクト台を持つように選ぶことができ、形状も任意に設定することができる。従って、流れの減衰を速くするためには、外力の作用領域の場所は任意に設定することができ、作用時間は任意に短く設定できることがわかった。

(2) 弱ルベグ空間における解の正則性について

全空間上の非圧縮ナビエ・ストークス方程式の初期値問題について考察を行なった。特に、筒井容平氏との共同研究により、実補間の手法を用いた、Meyer-Yamazaki 型の外力項評価を改良し、外力付きの積分方程式の時間局所的可解性を保証した。また、得られた時間局所解を用いることで、一意性定理の改良に成功した。さらに、強解が存在する為の初期値の必要十分条件を導き、それが初期値の空間特異性の弱さのみに由来することを明らかにした。

(3) スケール不変なベゾフ空間における定常解の安定性

全空間上の非圧縮ナビエ・ストークス方程式に対し、ソボレフ空間の実補間空間であるベゾフ空間における、定常解の存在および安定性について研究を行なった。本研究では、Cunanan 氏及び筒井容平氏との共同研究として、弱ルベグ空間において知られている Meyer-Yamazaki 型の外力項評価を、斉次ベゾフ空間においても整備することで、スケール不変なベゾフ空間における同方程式の定常解の構成に成功した。また、定常解の安定性を解析する為、摂動作用素がベゾフ空間において解析的半群を生成すること及び、その Lp - Lq 型評価を導出した。以上より、定常解周りの摂動方程式から得られる積分方程式の時間大域解を、初期擾乱が小さいときに構成した。さらに初期擾乱の低周波成分が十分に制御されている場合に、摂動方程式の解の時間減衰を導出し、定常解の漸近安定性を示すことができた。

(4) 時間周期的な強解の存在について

全空間におけるナビエ・ストークス方程式の時間周期的強解の存在について弱ルベグ空間の枠組みで考察した。同問題については Yamazaki (Math. Ann.,2000) により発散形式の外力に対して、弱い意味での積分方程式をみたす解が存在することが知られている。そこで筒井容平氏との共同研究により実補間空間論に基づく Meyer-Yamazaki の方法を導入することで、発散形式でない外力に対して、通常の積分方程式を満たす時間周期解を構成した。この手法の特長により、解の導関数の評価を含む、正則性の情報を多く含んだ解を構成することができた。

(5) 2次元平面における解の漸近展開について

2次元平面における非圧縮ナビエ・ストークス方程式の解の漸近展開を行なった。同問題については、先行研究により初期値の適切なモーメント有限条件が要求されてきた。実際、解の一次の主要項は、初期値の一次モーメントを用いて表現されることが知られている。本研究では、初期値にいかなるモーメント条件を課すことなく、先行研究で得られたものと同様の漸近系を導出することを試みた。特に、非圧縮条件によって流れ函数の構造が必然的に備わるような初期条件に対し、その積分平均だけを用いて解の一次の漸近展開を導出した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Okabe Takahiro, Tsutsui Yohei	4. 巻 -
2. 論文標題 Remark on the strong solvability of the Navier-Stokes equations in the weak L^n space	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-021-02236-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Cunanan Jayson, Okabe Takahiro, Tsutsui Yohei	4. 巻 -
2. 論文標題 Asymptotic stability of stationary Navier-Stokes flow in Besov spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 1~22
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3233/asy-211720	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Brandolese Lorenzo, Okabe Takahiro	4. 巻 34
2. 論文標題 Annihilation of slowly-decaying terms of Navier-Stokes flows by external forcing	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 1733~1757
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6544/abdbbf	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 岡部考宏	4. 巻 2155
2. 論文標題 Rapid energy decay of the Navier-Stokes flow by the external force	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録「流体と気体の数学解析」	6. 最初と最後の頁 44~55
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Okabe, Yohei Tsutsui	4. 巻 263
2. 論文標題 Time periodic strong solutions to the incompressible Navier-Stokes equations with external forces of nondivergence form	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 8229-8263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2017.08.038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Okabe	4. 巻 264
2. 論文標題 Space-time asymptotics of the two dimensional Navier-Stokes flow in the whole plane	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 728-754
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2017.09.025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計24件 (うち招待講演 20件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 岡部考宏
2. 発表標題 Control of weak solutions of the Navier-Stokes equations by external forcing
3. 学会等名 大阪大学 微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岡部考宏
2. 発表標題 Control of weak solutions of the Navier-Stokes equations by external forcing
3. 学会等名 若手による流体力学の基礎方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Lorenzo Brandolese, 岡部考宏
2. 発表標題 Control of weak solutions of the Navier-Stokes equation by external forcing
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Annihilation of slow-decay factors of the Navier-Stokes flow by the external force
3. 学会等名 Vorticity, Rotation and Symmetry (V)- Global Results and Nonlocal Phenomena (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Lorenzo Brandolese, 岡部考宏
2. 発表標題 Annihilation of slow-decay factors of the Navier-Stokes flow by the external force
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岡部考宏
2. 発表標題 外力によるナビエ・ストークス方程式の解の漸近解析
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岡部 考宏
2. 発表標題 Asymptotic expansions of the 2D Navier-Stokes flow in the Hardy space
3. 学会等名 応用数理解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岡部 考宏
2. 発表標題 Rapid energy decay of the Navier-Stokes flow by external forces
3. 学会等名 RIMS研究集会「流体と気体の数学解析」（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Lorenzo Brandolese, 岡部 考宏
2. 発表標題 Annihilation of slow-decay factors of the Navier-Stokes flow by the external force
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Remark on the local solvability of the Navier-Stokes equations in weak L^n -space
3. 学会等名 Conference on Mathematical Fluid Dynamics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Remark on the local solvability of the Navier-Stokes equations in weak Lebesgue spaces
3. 学会等名 応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Asymptotic expansions of the 2D Navier-Stokes flow in the Hardy space
3. 学会等名 Workshop on the Navier-Stokes flow (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岡部考宏
2. 発表標題 弱ルベーク空間における非圧縮ナビエ・ストークス方程式の可解性と一意性について
3. 学会等名 微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Remark on the strong solvability of the Navier-Stokes equations in the weak L^n space
3. 学会等名 The 3rd Meeting of Young Researchers in PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Remark on the strong solvability of the Navier-Stokes equations in the weak L^n space
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岡部考宏
2. 発表標題 Asymptotic expansions of the 2D Navier-Stokes flow in the Hardy space
3. 学会等名 第 12 回 実解析と函数解析による偏微分方程式論 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Time periodic strong solutions to the Navier-Stokes equations in the weak L^n space
3. 学会等名 応用数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Remark on the strong solvability of the Navier-Stokes equations in weak L^n space
3. 学会等名 信州大学偏微分方程式研究会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Remark on the strong solvability of the Navier-Stokes equations in weak L^n space
3. 学会等名 岩手数理科学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Remark on the strong solvability of the Navier-Stokes equations in weak L^n space
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Remark on the strong solvability of the Navier-Stokes equations in weak L^n space
3. 学会等名 RIMS 研究集会「非圧縮粘性流体の数理解析」（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Remarks on the strong solvability of the Navier-Stokes equations in weak L^n space
3. 学会等名 第15 回日独流体数学国際研究集会（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahiro Okabe
2. 発表標題 Remark on the local solvability of the Navier-Stokes equations in weak Lebesgue spaces
3. 学会等名 第19回北東数学解析研究会（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岡部考宏，筒井容平
2. 発表標題 Remark on the strong solvability of the Navier-Stokes equations in the weak L^n space
3. 学会等名 2018日本数学会年会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Mathematical Fluid Mechanics and Related Topics	開催年 2018年～2018年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
フランス	Lyon 1 University		