

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 21 日現在

機関番号：13903

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K14216

研究課題名(和文) 圧縮性粘性流体と関連する諸問題の安定性解析

研究課題名(英文) Stability analysis of compressible viscous fluids and related problems

研究代表者

千頭 昇 (Chikami, Noboru)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60789006

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、気体力学の基礎方程式である圧縮性 Navier-Stokes 系や、広く拡散現象を記述する非線形熱方程式の適切性、解の安定性、及び漸近挙動の解析を行なった。圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 系に対しては、大域適切性、定数定常解の安定性と時間減衰評価を得た。また、非定常問題に対する非自明解の存在と一意性を示した。さらに、空間的に非一様なポテンシャルを非線形項の前に持つ Hardy-Henon 熱方程式に対して、適切性、時間大域挙動の分類、時間減衰評価を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

流体の数学解析では現実で見られる流体现象を取り扱うために、初期摂動が高速振動する流れを含む枠組みで問題を考察することが重要になる。そのために、低い正則性を持つ初期値に対して解の構成を考察することが必要となるが、本研究ではその足がかりとなる適切性の結果を得た。適切性とは偏微分方程式の解の存在と一意性の他、初期値の摂動に対して解が安定であることを指すが、本研究では、それらの性質を二層流体を記述するモデルに対して考察した。また、様々な拡散現象を記述する Hardy-Henon 熱方程式に対しても詳細な解の性質を調べた。得られた解の性質の情報は、関連する流体・拡散現象の予測に繋がると期待される。

研究成果の概要(英文)：In this study, we have shown the well-posedness, stability, and asymptotic behaviors for the compressible Navier-Stokes system describing various fluids, as well as for nonlinear heat equations describing diffusion phenomena. We have proved local and global well-posedness stability and time-decay estimates for steady-state solutions for compressible Navier-Stokes-Korteweg system. For the Hardy-Henon heat equation with a spatially inhomogeneous potential before the nonlinear term, we have proved the local and global well-posedness, the classification of the time-global behaviors, and the time-decay estimates for the solutions.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：圧縮性流体 非線形熱方程式 適切性 調和解析 関数不等式

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) (圧縮性流体の適切性・漸近挙動の研究) 2000年初頭から圧縮性流体の数学解析において、高速振動する初期値を含む枠組みでの解の構成が技術的に可能となり、関連する様々なモデルに対して、そのような枠組みでの適切性が盛んに研究されるようになった。偏微分方程式の適切性とは、解の存在、一意性、初期値に対する連続依存性が成り立つことをいう。高速振動する初期値に対しての適切性の研究においては、特に初期値が取り得るクラスを可能な限り広げることが重要となり、そのためには臨界適切性を考察することが最初の足がかりとなる。臨界適切性とは、方程式が物理的要請として持つ尺度不変変換に関して不変な構造を持つ関数空間において、問題の適切性を考察することである。研究代表者はこれまでそのような枠組みで圧縮性流体を考察してきたため、本研究においてはその更なる深化を狙い、圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 系の適切性の研究を開始した。

(2) (半線形熱方程式の適切性・漸近挙動の研究) 同じく 2000年初頭から半線形拡散方程式の代表である藤田型方程式に対して、方程式から自然に定義されるエネルギー空間における解の適切性・大域挙動の分類が技術的に可能となった。熱方程式に対してのこれらに関する研究は古くからあったが、特にコンパクト性が崩れるような臨界状況においてそれが可能になったのは、プロファイル分解と呼ばれるコンパクト性の代替技術の発展がなされてからだった。これらの技術革新を受けて、空間的に非一様なポテンシャルを持つ Hardy-Henon 熱方程式に対して同様の適切性・時間大域挙動の分類を調べるために研究を開始した。

(3) (関数不等式の整備) 上記の偏微分方程式の数理解析において必要となる様々な関数不等式は、未整理の側面も多く、他の問題にも応用が期待できる重要な研究対象である。特に、非線形評価において必要となる積の評価、合成作用素の評価、そして微分と可積分性をトレードする類の関数不等式である Sobolev の不等式の改良・精査を行なうことに興味があった。

### 2. 研究の目的

(1) 圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 系に対しての適切性及び時間減衰評価を得ることを目的として開始した。これらの情報を通じて、二層流体の現象の安定性について知見を得て、現象の予測に繋げることを目論んでいる。

(2) Hardy-Henon 熱方程式の適切性・時間大域挙動の解析が目的である。特に非線形項の冪が特殊な臨界指数の場合の初期値による大域ダイナミクス分類に興味があった。また、Hardy-Henon 方程式はポテンシャルの冪によって Hardy 型、藤田型、Henon 型と分かれ、これに対する統一的な一般論の構築を目指している。

(3) 現在の偏微分方程式の数学解析において、既存の結果を改良するには、臨界型関数不等式の改良、もしくは方程式特有の新たな性質(未知関数の変換やベクトル場の構造、保存量等)の発見が必要となる。本研究では主に前者を目標とし、関数不等式の改良に主眼を置いていた。方程式に無関係に成り立つ不等式自体が、多くの応用性を秘めた興味深い対象である。特に、非線形評価において必要となる積の評価、合成作用素の評価、そして微分と可積分性をトレードする類の関数不等式である Sobolev の不等式の改良・精査に興味があった。

### 3. 研究の方法

上記全ての課題において、Sobolev の不等式や Gagliardo-Nirenberg 不等式などの既存の関数不等式や、Strichartz 評価や最大正則性評価に代表される各種方程式の時空間評価を拡張し、個々の問題に適切に応用することで研究を行なった。

### 4. 研究成果

(1) 圧縮性流体の適切性・漸近挙動の研究に対しては以下の成果を得た。

圧縮性 Navier-Stokes 系の臨界適切性と時間減衰評価を考察した。二相流体の相転移を記述する圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 系を臨界 Besov 空間において考察し、時間大域可解性を示した。特に、通常の圧縮性粘性流体と異なり、音速が零となる場合でも線形化方程式が安定であり、非線形問題に対して小さな時間大域解が構成できることを明らかにした。更に、この解に対して初期値に追加的な可積分性を課すことで、自乗可積分空間における最適な時間減衰評価が成り立つことを示した。

二層流体の相転移を記述する圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 系の定常問題に対する臨界適切性と、解の存在に関するパラメータ依存度の明示的十分条件を示した。まず、圧縮性 Navier-

Stokes-Korteweg 系の定常問題に対して、尺度臨界型 Besov 空間における適切性を示した。臨界正則性を持つ外力に対して線形化方程式の楕円型正則性を示し、既存の研究において冗長だった解の構成スキームを簡略化した。現在までのところ臨界空間における定常解は知られていない。また、定常解が存在するための初期値の小ささの詳細なパラメータ依存性を明らかにした。

(2) 半線形熱方程式の適切性・漸近挙動の研究に対しては以下の成果を得た。

空間的に非一様な Hardy 型ポテンシャルが付随した冪乗型非線形項を持つ半線形放物型方程式である Hardy 熱方程式に対して、臨界 Besov 空間における時間大域可解性を示した。Besov 空間における一般的な冪乗型非線形項に対して合成関数の評価を確立し、Hardy-Henon 熱方程式の適切性が成立する関数空間を拡張し、臨界 Besov 空間における時間大域適切性を示した。また、端点補完指数を取ることにより、小さな前方自己相似解を構成した。

Hardy-Sobolev 臨界指数をもつ非線形項に対して、対応する初期値問題の解をエネルギー空間において構成した。また、基底状態以下のエネルギーを持つ初期値に対して、一意的な大域解のエネルギーがゼロに減衰するか、有限時間または無限時間で爆発するか 2 種類の現象が起こることを示した。これは potential well における初期値のエネルギー準位が mountain pass energy と呼ばれる臨界エネルギーよりも低い状況における大域挙動の分類としては、最終的な結果である。

一般の Hardy-Henon 熱方程式に対する重み付きルベグ空間における統一的な局所適切性理論を示した。Hardy-Henon 熱方程式に対して、これまで Hadamard の意味での適切性は、ポテンシャルが Hardy 型である場合のときしか示されていなかった。重み付き Lebesgue 空間を用いることでポテンシャルの冪を重み関数の増減と見做し、Hardy 型、Henon 型、藤田型の全ての場合を統一的に扱う局所理論を構築した。

Hardy-Henon 熱方程式に対する重み付き Lorentz 空間における符号変化解の無条件一意性を考察した。これは Hardy 型、Henon 型、藤田型の既存の結果を内包する一般化である。非線形項の冪を固定すると、無条件一意性が成立する重み付き Lorentz 空間の臨界指数として、二つの重要な指数が現れる。これらは、尺度臨界指数と Serrin 指数に対応した臨界指数であり、それぞれ、解の局所存在のために初期値が許容できる局所特異性の限界と、非線形項が局所可積分になる限界を表す。単独の臨界指数以上では解の無条件一意性が成立し、これらの臨界指数が重なる二重臨界においては無条件一意性が破綻する。本研究では、ポテンシャルがない藤田型方程式に対しても、Lorentz 空間における補間指数が無条件一意性の sharp threshold として現れることを明確にした。

Hardy-Henon 熱方程式に対する重み付き Lorentz 空間における適切性と、小さな初期値に対する解の漸近挙動を考察した。小さい初期値が非線形問題における自己相似的な臨界減衰を持つ場合は、時間大域解は対応する非線形自己相似解に時間無限大で減衰する。小さい初期値が臨界減衰より遅い減衰を持つ場合は、時間大域解は対応する線形自己相似解に漸近する。これらの結果を有界関数のクラスを含む位相で示した。

重み付き拡散 Hamilton-Jacobi 方程式に対する重み付き Lebesgue 空間と重み付き Sobolev 空間における局所適切性理論を示した。この方程式については、非線形項の冪、重みの冪、そして解空間に付随するパラメータ（可積分指数や微分指数）という三つの要素に依存して可解性の様相が複雑に変化する。本研究においては、重み付き Lebesgue 空間においては可解となる非線形項の冪に制限が付き、重み付き Sobolev 空間においてはそのような制限が付かないことを明らかにした。

(3) 関数不等式の整備については以下の成果を得た。

Sobolev の不等式等に代表される可微分性と可積分性を関連付ける線形の関数不等式や、Holder の不等式等に代表される正則性を振り分ける双線形の関数不等式を、Littlewood-Paley 理論による周波数分解や特異積分作用素の理論を用いて改良し、その最適性について考察を行った。特に、流体の数学解析において基本的道具となる Gagliardo-Nirenberg 型の関数不等式を、関数の波数変換の重み付き積分量で正則性を特徴付ける Fourier-Herz 空間において証明した。また、Besov 空間における関数不等式の最良定数や最大化関数について新たな知見を示した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Noboru Chikami, Masahiro Ikeda, Koichi Taniguchi	4. 巻 34
2. 論文標題 Well-posedness and global dynamics for the critical Hardy-Sobolev parabolic equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 8094-8142
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Noboru Chikami, Masahiro Ikeda, Koichi Taniguchi	4. 巻 222
2. 論文標題 Optimal well-posedness and forward self-similar solution for the Hardy-H'eron parabolic equation in critical weighted Lebesgue spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Chikami Noboru	4. 巻 5
2. 論文標題 Composition estimates and well-posedness for Hardy?H?non parabolic equations in Besov spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Elliptic and Parabolic Equations	6. 最初と最後の頁 215-250
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s41808-019-00039-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Noboru Chikami	4. 巻 275
2. 論文標題 On Gagliardo-Nirenberg type inequalities in Fourier-Herz spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 1138-1172
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2018.06.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Noboru Chikami and Takayuki Kobayashi	4. 巻 21
2. 論文標題 Global well-posedness and time-decay estimates of the compressible Navier-Stokes-Korteweg system in critical Besov spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Fluid Mechanics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00021-019-0431-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Noboru Chikami, Masahiro Ikeda, Koichi Taniguchi	4. 巻 -
2. 論文標題 Local well-posedness for the scale-critical semilinear heat equation with a weighted gradient term	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Trends in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 千頭昇
2. 発表標題 Optimal well-posedness of Hardy-H'eron parabolic equation
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Noboru Chikami
2. 発表標題 Well-posedness of Hardy-H'eron parabolic equation
3. 学会等名 ISAAC Harmonic Analysis and Partial Differential Equations (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 千頭昇
2. 発表標題 `Well-posedness and decay rates of the compressible Navier-Stokes-Korteweg system`
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー, 名古屋大学
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 千頭昇
2. 発表標題 `Global well-posedness and time-decay estimates for the compressible Navier-Stokes-Korteweg system`
3. 学会等名 RIMS研究集会「発展方程式論の新展開：数理理論と現象解析の協働」, 京都大学(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 千頭昇
2. 発表標題 `On Gagliardo-Nirenberg type inequality in Fourier-Lebesgue spaces and its application`
3. 学会等名 「応用解析」研究会, 早稲田大学
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 千頭昇
2. 発表標題 `Wellposedness and time decay of CNSK`
3. 学会等名 「若手による流体力学の基礎方程式研究集会」, 名古屋大学
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 千頭昇
2. 発表標題 `Well-posedness and stability for Hardy-H <sup>s</sup> 'enon parabolic equations'
3. 学会等名 VI Italian-Japanese Workshop ``Geometric properties for parabolic and elliptic PDE 's'', INDAM, Cortona, Italy (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 千頭昇
2. 発表標題 `Remarks on Gagliardo-Nirenberg type inequalities in Fourier-Herz spaces''
3. 学会等名 Inhomogeneous Flows/ Asymptotic Models and Interfaces Evolution, CIRM, France (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 千頭昇
2. 発表標題 Well-posedness for Hardy-H <sup>s</sup> 'enon parabolic equations in Besov spaces
3. 学会等名 大阪大学微分方程式セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 千頭昇
2. 発表標題 Some functional inequalities in Fourier-Herz spaces
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 千頭 昇
2. 発表標題 Global well-posedness of the compressible Navier-Stokes-Korteweg system in critical Besov spaces
3. 学会等名 Partial Differential Equations for Social and Biological Events (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 千頭 昇
2. 発表標題 Well-posedness for Hardy-H <sup>1</sup> -elliptic parabolic equations in Besov spaces
3. 学会等名 Functional Inequalities and Nonlinear Analysis in OCU
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 千頭 昇
2. 発表標題 Global well-posedness of the compressible Navier-Stokes-Korteweg system
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 千頭 昇
2. 発表標題 Global well-posedness of the compressible Navier-Stokes-Korteweg system
3. 学会等名 Mathematics of Schrödinger Equations and Related Topics
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 千頭 昇
2. 発表標題 Well-posedness and time-decay estimates of CNSK
3. 学会等名 Seminars on Mathematical fluid Mechanics in OCU
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Noboru Chikami
2. 発表標題 Remarks on Gagliardo-Nirenberg type inequalities in Fourier-Herz spaces
3. 学会等名 AMS Sectional Meeting
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Noboru Chikami
2. 発表標題 Some functional inequalities in Hat-Sobolev spaces
3. 学会等名 Nonlinear Partial Differential Equations for Future Applications, Hyper- bolic and Dispersive PDE ( 国際学会 )
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Noboru Chikami
2. 発表標題 Remarks on Gagliardo-Nirenberg type inequalities in Fourier-Herz spaces
3. 学会等名 浜松偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Noboru Chikami
2. 発表標題 Some functional inequalities in Fourier-Herz spaces
3. 学会等名 愛媛大学解析セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Noboru Chikami
2. 発表標題 Unconditional uniqueness and non-uniqueness for Hardy-Henon parabolic equations
3. 学会等名 seminario di Analisi Matematica (Sapienza Universita di Roma) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Noboru Chikami
2. 発表標題 Solvability of the stationary compressible Navier-Stokes-Korteweg system
3. 学会等名 Workshop on Evolution Equations (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
チュニジア	University of Tunis El Manar			