

令和 2 年 6 月 30 日現在

機関番号：24402

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14217

研究課題名(和文) 最大値ノルムによるナビエ・ストークス方程式の解析

研究課題名(英文) Analysis of the Navier-Stokes equations by maximum norms

研究代表者

阿部 健 (Abe, Ken)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：80748327

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では非圧縮粘性流体の運動方程式である非線形ナビエ・ストークス方程式の初期値境界値問題について、解の存在、時間無限大の挙動、粘性極限への収束などについて研究を行った。具体的に得られた成果は、外部領域におけるストークス半群の最大値ノルムの時間無限大の評価、2次元非線形外部問題の時間大域一意可解性、軸対称旋回なし初期値に対する時間大域解の一意存在と粘性極限への収束、シリンダーの外部領域における軸対称旋回あり初期値に対する時間大域解の構成などである。この他に2次元半空間における渦度方程式の可解性、2次元オイラー方程式の進行波解の軌道安定性などについても研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ナビエ・ストークス方程式は大気や水などの非圧縮粘性流体の運動を記述する偏微分方程式である。流体の運動を理解し応用することは古くから人々の生活を豊にしてきたが、その運動について偏微分方程式の解析により得られる知見は大きい。偏微分方程式論においても弱解や半群など様々な解析の道具が生み出されてきた方程式であるが、依然として数学的に重要な未解決問題が多く残されている。本研究では半群を用いたアプローチにより外部問題、軸対称解、粘性極限、渦度方程式などの研究を行い、レイノルズ数が高い非圧縮粘性流の運動について数学解析による知見を得た。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we studied the initial value boundary value problem of the nonlinear Navier-Stokes equation, which is the equation of motion for incompressible viscous fluids. We investigated existence of solutions, large time behavior of solutions, convergence to vanishing viscosity limits. The results obtained include large time  $L_{\infty}$ -estimates of the Stokes semigroup in external domains, global well-posedness of the two dimensional exterior problem, global well-posedness of the Cauchy problem for axisymmetric initial data without swirl and its converges to vanishing viscosity limits, construction of global-in-time solution for axisymmetric initial data in the exterior of the cylinder, etc. In addition, we also conducted researches on well-posedness of the vorticity equation and orbital stability of traveling wave solutions of the two-dimensional Euler equation.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：ストークス半群 リュービル型定理 粘性ゼロ極限 軸対称解 外部問題

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式の理論において有界関数空間は、爆発現象や空間無限遠方非減衰解を解析する際に有効であるが、ナビエ・ストークス方程式に対しては、特異積分作用素との相性から有界関数空間での理論はあまり知られていなかった。本課題は研究代表者の行う有界関数空間でのストークス半群解析性の研究を非線形問題へと応用する方針のもと行った。

### 2. 研究の目的

具体的な研究課題は、外部問題の研究を中心として、軸対称解の研究、2次元渦度方程式の研究、オイラー方程式の進行波の研究などを行った。外部問題については、高レイノルズ数を持つ時間大域解の理論が目標で、軸対称解については正則性の問題、オンサガー予想との関係解明が目的である。渦度方程式の研究は2次元乱流の解明を目標としている。

### 3. 研究の方法

研究手法は外部問題については有界関数空間でのストークス半群、リュービル型定理を道具としている。軸対称解の研究は、作用素の純虚数ベキの評価、補間空間などの古典的な発展方程式の手法と輸送拡散方程式の解析を組み合わせることによる。渦度方程式の解析については、積分形の解の表現公式を導出した。オイラー方程式の進行波解の研究では Concentration-Compactness 原理や輸送方程式のディペルナ・リオンズ理論などを用いて解析を行った。

### 4. 研究成果

#### (1) 2次元外部問題の時間大域可解性

2次元ナビエ・ストークス方程式の外部問題は空間無限遠方で漸的に定数になる定常解の存在が知られているが、非定常問題においてこのような解の存在は知られていなかった。領域が全空間の場合には有界な初期値に対して時間大域一意解が存在することが、儀我氏等(1999)により証明されている。境界がある場合の困難さは渦度のアприオリ評価が得られないことによるが、物理的には高レイノルズ数を持つ解が存在するかという問題になっている(図1を参照)。本研究では初期速度場が有界かつディリクレ積分有限となるならば、2次元外部問題において時間大域一意解が存在することをストークス半群からの摂動がエネルギー有限となることを用いて証明した。これにより特に漸的に定数となる初期値に対して、漸的に定数となる時間大域一意解が存在することが証明できた。この結果は ARMA(2018)から単著論文として出版された。

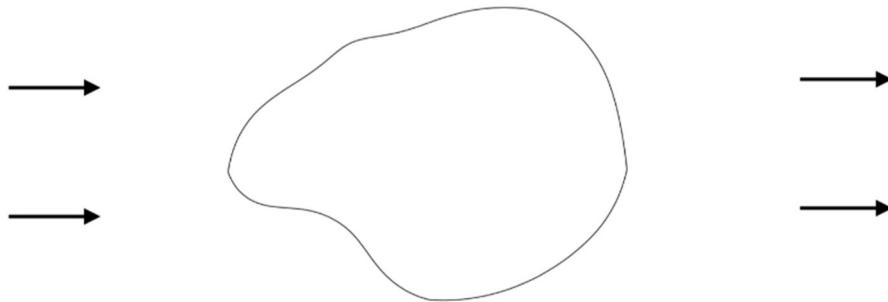


図 1: 障害物の外部における流れ

#### (2) ストークス半群の時間無限大の $L_{\infty}$ 評価

外部問題におけるストークス半群の時間無限大の評価は、 $L_p$  空間においてはボルキアース・ゾール(1987)とボルキアース・ファルンフォーン(1993)により研究され、ストークス半群は有界解析半群となることがわかっている。同様の問題を有界関数空間においても考えることができ、空間次元が3次元以上の場合にはマレモンティ(2014)とボルカート・ヒーバー(2015)により熱半群からの摂動によりストークス半群が有界解析半群となることが報告されていた。本研究ではリュービル型定理と水町の表示公式を組み合わせる先行研究とは全く異なる方法により3次元以上の場合に完全な証明を与えた。また未解決であった2次元の場合もネットフォースが消えるという条件のもとで部分的な結果を得た。この結果は JFA(2020)から単著論文として出版された。この問題はその後、レゾルベントストークス方程式に対してストークスパラドクスとネットフォースの漸近公式を用いることで、先行研究で課したネットフォースについての仮定を取り除くことができ、完全解決した。この結果は arXiv に投稿した。

### (3) 軸対称解の粘性極限

3次元初期値問題の研究において、軸対称解に対する解析は一般の初期値問題を考察する上で重要な知見を与える。特に初期値が軸対称回転なしとなる場合には初期値問題は時間大域一意解を持つことが知られている。しかし知られている時間大域可解性の結果はエネルギー有限を仮定するものであり、初期値問題の時間局所適切性の空間との間には差がある。本研究では局所適切性の得られる  $L_p$  可積分初期値 ( $p > 3$ ) に対して、時間大域一意解を構成する研究を行った。また構成した時間大域解に対して、粘性極限をとりオイラー方程式の弱解を構成し、粘性極限についてオンサガー予想、加藤の同値性条件などとの関係を調べた。なお解の構成はノイマン境界条件を課しシリンダー内部で行い、時間局所解の構成にはラプラス作用素の純虚数ベキの評価、補完空間などを用いた。この結果は単著論文として *Manuscripta Math* (2019), *JMPA* (2020) から出版された。

### (4) 軸対称回転あり解の正則性

軸対称回転あり初期値に対して初期値問題の時間大域可解性は不明で、キャファレリ・コーン・ニーレンバーグ理論により爆発点が存在すれば必ず対称軸上に位置することや、リュービル型定理によりタイプI爆発は起こらないことが知られている。回転がある場合には時間大域解についての知見がほとんどない。本研究では全空間よりも解析が比較的容易になるシリンダー外部における軸対称回転あり流を考え、時間大域一意解をエネルギー有限で  $L_3$  可積分かつ速度場の方位角成分が有界となる初期値に対して時間大域一意解を構成した。これにより大域解を構成する際に必要となる、速度場の方位角成分の仮定について知見が得られた。この結果はセレギン氏（オックスフォード大学）との共著論文で *PRSE* から出版予定である。

### (5) 測度を初期値とする2次元半空間における渦度方程式

2次元渦度方程式は点渦、渦層などのスケール臨界な特異性を持つ初期値に対するナビエ・ストークス方程式を解析する上で重要で、全空間の場合には解の存在、一意性ともに解決済みである。しかし半空間の場合には、境界の影響があり渦度方程式についての新たな知見が必要である。本研究では半空間における渦度方程式の積分形をソロニコフ (2003) によるストークス半群の基本解を用いて導出し、初期渦度の全変動が小さい場合に全変動有界な渦度方程式の時間大域一意解が構成できることを証明した。またスケール優臨界空間での時間大域可解性の結果と組み合わせることで、初期測度の離散部分が小さい場合に時間大域一意解が構成できることを示した。この結果は arXiv に投稿した。

### (6) 2次元オイラー方程式の進行波解の軌道安定性

オイラー方程式の定常解である円形渦は、時間発展について  $L_1$  ノルムで安定することがワン・パルピレンティ (1986)、シデリス・ヴェガ (2009) により示されている。ラムの双極子はラム (1906) とチャプリギン (1903) により発見された進行方向について対称となるオイラー方程式の進行波解である。本研究ではフリードマン・トルキングトン (1981) による渦度の変文原理による進行波解の構成方法に基づいて進行波解の基本的な性質である軌道安定性を証明した。証明にはリオンスによる Concentration-Compactness 原理、ギダス・ニ・ニーレンバーグによる平面移動の方法、ディペルナ・リオンスによる renormalized solution などを用いた。この結果はチェ氏（蔚山科学技術大学）との共同研究として、arXiv に投稿した。

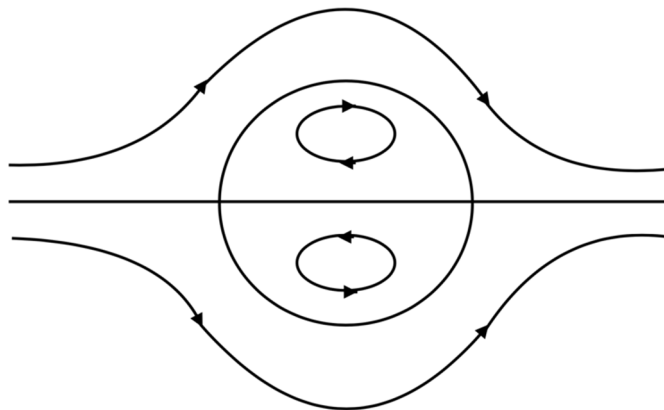


図 2: ラムの双極子

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 K. Abe, G. Seregin	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Axisymmetric flows in the exterior of a cylinder	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） doi.org/10.1017/prm.2018.121	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Abe	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 The Navier-Stokes equations with the Neumann boundary condition in an infinite cylinder	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Manuscripta Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） doi.org/10.1007/s00229-018-01102-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Abe	4. 巻 227
2. 論文標題 Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Arch. Rational Mech. Anal.	6. 最初と最後の頁 69-104
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） DOI 10.1007/s00205-017-1157-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Abe	4. 巻 278
2. 論文標題 Liouville theorems for the Stokes equations with applications to large time estimates	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Funct. Anal.	6. 最初と最後の頁 10832
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.108321	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Abe	4. 巻 137
2. 論文標題 Vanishing viscosity limits for axisymmetric flows with boundary	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Math. Pures Appl.	6. 最初と最後の頁 1-32
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.matpur.2020.01.005">https://doi.org/10.1016/j.matpur.2020.01.005</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計28件 (うち招待講演 27件 / うち国際学会 14件)

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Stability of Lamb dipoles
3. 学会等名 Muroran nonlinear analysis seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Stability of Lamb dipoles
3. 学会等名 Workshop on nonlinear wave equations and related topics (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 The vorticity equations in a half plane with measures as initial data
3. 学会等名 Handayama Differential Equation Seminar (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 The vorticity equations in a half plane with measures as initial data
3. 学会等名 Workshop on the asymptotic analysis of partial differential equations and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Vanishing viscosity limits for axisymmetric flows with boundary
3. 学会等名 3rd meeting of young researchers in PDES (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Vanishing viscosity limits for axisymmetric flows with boundary
3. 学会等名 PDE seminar, Shanghai Jiao Tong University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Liouville theorems for the Stokes equations with applications to large time estimates
3. 学会等名 RIMS conference: Analysis for incompressible flows (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Vanishing viscosity for axisymmetric flows with boundary
3. 学会等名 Workshop on the Navier-Stokes flow, Nagoya University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Vanishing viscosity limits for axisymmetric flows
3. 学会等名 Matsuyama Analysis seminar (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Axisymmetric flows in the exterior of a cylinder, Kyushu DE seminar
3. 学会等名 Kyushu University (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Vanishing viscosity limits for axisymmetric flows
3. 学会等名 Autumn Meeting of Mathematical Society of Japan, Okayama University
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Axisymmetric flows in the exterior of a cylinder
3. 学会等名 PDEs and Mathematical Hydrodynamics: in Honor of Vsevolod Alekseevich Solonnikov's 85'th Birthday, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Axisymmetric flows in the exterior of a cylinder
3. 学会等名 Nonlinear PDEs modeling fluid dynamics, 12th AIMS conference, Taipei, Taiwan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data
3. 学会等名 Recent Trends in Navier-Stokes Equations and Related Problems, 12th AIMS conference, Taipei, Taiwan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Axisymmetric flows in an exterior domain
3. 学会等名 AMS Spring Southeastern Sectional Meeting, Vanderbilt University, Nashville, TN, US (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年



1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data
3. 学会等名 PDEs seminar, Universit'e Grenoble Alpes, Institut Fourier, France (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data
3. 学会等名 5th. Mathematical Theory of Turbulence via Harmonic Analysis and Computational Fluid Dynamics, Nagoya University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Axisymmetric flows in an exterior domain
3. 学会等名 Hirosaki workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Axisymmetric flows in an exterior domain
3. 学会等名 The 15th Japanese-German International workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Waseda University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data
3. 学会等名 Evolution Eq. and Mathematical Fluid Dynamics, Tohoku University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Axisymmetric flows in the exterior of a cylinder
3. 学会等名 Kyushu DE seminar, Kyushu University (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Axisymmetric flows in an exterior domain
3. 学会等名 Nagoya DE seminar, Nagoya University (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data
3. 学会等名 6th Mathematical Science Seminar, Gifu University (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data
3. 学会等名 Hirosaki Analysis Seminar (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data
3. 学会等名 NLPDE Seminar (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data
3. 学会等名 PDEs Seminar, Osaka University (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Global well-posedness of the two-dimensional exterior Navier-Stokes equations for non-decaying data
3. 学会等名 South Osaka Applied Analysis Seminar, Osaka City University (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Abe
2. 発表標題 Analysis of the Navier-Stokes equations in a space of bounded functions
3. 学会等名 Colloquium, Osaka City University (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Ken Abe <a href="https://sites.google.com/site/kabehomepage/home?authuser=0">https://sites.google.com/site/kabehomepage/home?authuser=0</a>
--

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考