

令和 2 年 6 月 2 日現在

機関番号：32702

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14225

研究課題名(和文) 血流の解析を目標とした圧縮性粘性流体方程式の適切性

研究課題名(英文) The well-posedness for the compressible viscous fluid equations for the mathematical analysis of blood flow

研究代表者

村田 美帆 (Murata, Miho)

神奈川大学・工学部・助教

研究者番号：90754888

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：圧縮性流体中を剛体が並進運動や回転運動している場合の流体と剛体双方の運動を記述した方程式系について数学的に解析するため、まずは流体の運動のみを考察した。特に Navier-Stokes-Korteweg 方程式を全空間で考え、次の結果を得た。圧力が密度の関数であり定数状態のまわりで単調増加関数となる場合と圧力が密度について定数関数となる場合に、時間大域解の一意存在性を最大正則性が成り立つクラスで得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年、Navier-Stokes-Korteweg 方程式と剛体双方の運動を記述した問題を解析する数値実験が報告されているが、数学的に方程式の適切性について考察した結果は見当たらない。

また、本研究で用いた時間大域解を得る手法は、Navier-Stokes-Korteweg 方程式に限らず、他の放物型方程式や双曲・放物型方程式系を全空間で解析する場合に用いることができると期待される。

研究成果の概要(英文)：In order to analysis the system of equations describing the motion of a rigid body in a compressible fluid, we only consider the motion of fluid. We especially consider the Navier-Stokes-Korteweg system in the whole space and get the folowing results. We have the global well-posedness in the maximal regularity class around the constant state in the case that the pressure is a strictly increasing function or a constant function of a density.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：圧縮性粘性流体 圧縮性Navier-Stokes方程式 Navier-Stokes-Korteweg 時間局所解 時間大域解 最大正則性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

動脈硬化や動脈瘤のような動脈の病気の解明や血管の手術には血液の流れを考察する必要があるが、生体现象であるため直接的な実験や観測が困難である。そのため、理論的な解析が必要であるが、数学的な研究成果は少ない。そこで血液を流体として、流体の運動をあらわす Navier-Stokes 方程式を考察することとした。

特に、大動脈瘤のように血管壁に大きな圧力がかかる場合には流体の圧縮性を考慮すべきである。実際、大動脈瘤の主な原因とされている動脈硬化の研究をするために、血液を圧縮性粘性流体とみなし血流を解析する数値実験が報告されている。さらに、血液の主な構成要素は赤血球であるため、血流を解析するために赤血球の運動を考察することは重要であるとされている。

このように、圧縮性流体と赤血球の運動を考察することは血流の解析につながると考えられるが、モデル方程式の妥当性について検証した研究は少ない。このような背景のもと、簡単のため赤血球を剛体として、剛体が圧縮性流体の中を並進運動や回転運動しているときの流体と剛体双方の運動を記述した方程式系（以下、連成問題と呼ぶ）の考察を行うこととした。

2. 研究の目的

本研究の目的は、血流の数学的な解析の第一歩として、連成問題の時間大域解について考察することである。流体方程式に限らず、時間大域的適切性を証明する際、まず定常解の存在を証明し、定常解の近傍で大域解の存在性を考察するのが一般的である。そこで、次を目標とした。

- (1) 定常解の一意存在性を示し、存在性を示した定常解の近傍で時間大域的適切性を得る。
- (2) 時間大域解の漸近挙動を考察する。

3. 研究の方法

連成問題は流体が占める領域が外部領域であるため非有界であることと、剛体の運動にともない時間に依存して変化することから困難な点が多い。そこでまず、領域を時間に依存しない固定領域とし、圧縮性流体の運動のみを考えた。

圧縮性流体の運動を外部領域で解析するためには、境界から離れた領域では全空間における結果が必要である。以下、全空間において時間大域解を構成するために用いた方法について簡単に述べる。有界領域であれば最大正則性を用い指数減衰する解の存在を示すことができるが、全空間は非有界領域であるため、指数減衰する解の存在は期待できない。そこで最大正則性のみならず線形化問題の解に対する多項式減衰評価を示し、それらを組み合わせることで、「2. 研究の目的」で述べた (1) (2) について考察した。

4. 研究成果

連成問題を線形化した際、境界条件は、流体の流速と剛体の速度のつり合いを表す式で与えられることから非斉次ディリクレ境界条件となるため、双曲型方程式に現れる質量微分の項に対する評価が困難となった。これは圧縮性 Navier-Stokes 方程式特有の難しさなので、まずは Navier-Stokes-Korteweg 方程式 (以下、NSK 方程式とする) について考察することとした。NSK 方

方程式は気液相転移をともなう圧縮性流体の運動の解析につながると期待され、密度が空間について3階微分可能であることから、質量微分の項は低階項として扱うことができるため、圧縮性Navier-Stokes方程式特有の難しさがあらわれない。また近年、気液相転移をともなう圧縮性流体と剛体双方の運動を記述した連成問題を解析する数値実験が報告されていることから、NSK方程式と剛体の連成問題を数学的に考察することが必要であると考えた。

NSK方程式と剛体の連成問題を考察するためには、まずNSK方程式の考察が必要である。連成問題への応用を考慮すると、流体が占める領域は外部領域である。外部領域において考察するためには、全空間における考察が必要であるため、まずは全空間においてNSK方程式をあつかった。また、圧縮性Navier-Stokes方程式を考察する際、圧力は密度について単調増加関数であると仮定するケースが多いが、相転移をともなう現象をモデリングする場合、圧力は密度について単調増加関数になるとは限らない。そこで、次の2つの場合について考察した。

定数状態のまわりで

- (1) 単調増加関数となる場合
- (2) 定数関数となる場合

どちらの場合に対しても、解の高階微分に対しては L^p - L^q 最大正則性評価を用い、解の低階微分に対しては L^p - L^q 多項式減衰評価を用い、これらを組み合わせることにより、最大正則性が成り立つクラスで時間大域解の一意存在性を示すことができた。さらに、非線形問題に対する解の多項式減衰評価も得ることができた。従って、NSK方程式に対し全空間において定数状態のまわりで、「2. 研究目的」(1)(2)を得ることができた。(1)については、論文の掲載が決定している。

このように、 L^p - L^q 最大正則性が成り立つクラスで時間大域的適切性を考察する利点は、 L^2 枠で考察した先行研究 (Hattori and Li, 1996) に比べ、初期値の正則性を緩和することができるという点である。また最大正則性と多項式減衰評価を組み合わせるという手法の利点は、時間大域解の一意存在性を得ると同時に解の減衰評価も得ることができる点であり、ベゾフ空間において解の存在性と減衰評価を個々に示した先行研究 (Danchin and Desjardins, 2001. Chikami and Kobayashi, 2019) と異なる点である。本研究の手法は、NSK方程式に限らず、他の放物型方程式や双曲・放物型方程式系を全空間で解析する場合に用いることができると期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

| | |
|--|-----------------|
| 1. 著者名 Miho Murata and Yoshihiro Shibata | 4. 巻 - |
| 2. 論文標題 The global well-posedness of the Navier-Stokes-Korteweg equations | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 12件 / うち国際学会 5件）

| |
|--|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 The global well-posedness for the Navier-Stokes-Korteweg system |
| 3. 学会等名 Workshop on Mathematical Fluid Mechanics（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 Global well-posedness for the Navier-Stokes-Korteweg system |
| 3. 学会等名 Workshop on the Navier-Stokes flow（招待講演） |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 Global well-posedness for the Navier-Stokes-Korteweg system |
| 3. 学会等名 名古屋大学微分方程式セミナー（招待講演） |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 Navier-Stokes-Korteweg方程式の全空間における時間大域的適切性について |
| 3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 Navier-Stokes-Korteweg方程式の時間大域的適切性について |
| 3. 学会等名 浜松偏微分方程式セミナー（招待講演） |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 The global well-posedness for the compressible fluid model of Korteweg type |
| 3. 学会等名 熊本大学応用解析セミナー（招待講演） |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 Navier-Stokes-Korteweg方程式に対する時間大域解の一意存在性について |
| 3. 学会等名 第14回室蘭工業大学応用解析セミナー（招待講演） |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 The global well-posedness for the compressible fluid model of Korteweg type |
| 3. 学会等名 RIMS研究集会「偏微分方程式の臨界現象と正則性理論及び漸近解析」(招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 The global well-posedness for the Navier-Stokes-Korteweg system |
| 3. 学会等名 Japanese-Indonesian International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, (招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 Decay estimates of solutions for the Navier-Stokes-Korteweg system in \mathbb{R}^N |
| 3. 学会等名 第15回日独流体数学国際研究集会(招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 The global well-posedness for the compressible fluid model of Korteweg type |
| 3. 学会等名 International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modeling and Numerics, (招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 Decay estimates of solutions for the Navier-Stokes-Korteweg system in RN |
| 3. 学会等名 International Conference The last 60 years of Mathematical Fluid Mechanics: Longstanding Problems and New Perspectives (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 村田美帆 |
| 2. 発表標題 Navier-Stokes-Korteweg system に対する時間大域解の一意存在性について |
| 3. 学会等名 第6-7回明治非線型数理セミナー (招待講演) |
| 4. 発表年 2017年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
| | | | |