

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 18 日現在

機関番号：20103

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14228

研究課題名（和文）積分核付き相互作用によるパターン形成の数理解析と反応拡散近似による解析手法の確立

研究課題名（英文）Mathematical analysis and reaction diffusion approximation for pattern formations with nonlocal interactions

研究代表者

田中 吉太郎 (Yoshitaro, Tanaka)

公立ほこだて未来大学・システム情報科学部・准教授

研究者番号：80783977

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：細胞生物学の分野において、対象までの距離に応じて働きをかえる相互作用の存在が実験的に報告された。このような相互作用は空間大域的に影響を及ぼすため、適当な積分核との合成積で記述され、積分核つき相互作用をもつ発展方程式（非局所発展方程式）が提案されている。この非局所発展方程式は様々なパターンを再現でき、多方面に応用が期待されているが、解析手法は発展途上である。そこで、我々は、非局所発展方程式をすでに様々な理論が整備されている反応拡散系に近似する方法を構築した。一次元領域において、非局所発展方程式が反応拡散系で近似できることを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

動物や魚の表皮等に観察されるパターン形成や、昆虫の脳における神経形成、また細胞接着現象など、積分付きの相互作用をもつ発展方程式はさまざまな現象を記述することができる。広い分野の現象に応用が期待できるため、解析手法を整備することが求められるが、現状発展途上である。そこで我々は、すでに多くの理論が整備されている反応拡散系という方程式に、積分付きの相互作用をもつ発展方程式を近似する方法を提案し、理論的に近似できることを示した。このことから、積分付きの相互作用をもつ発展方程式を解析することが期待でき、さらなる応用例や理論的な知見を生み出すことができると考えている。

研究成果の概要（英文）： Recently the existence of the spatially nonlocal interactions which can change the influence on the objects depending on the distance has been reported in fish cells. As this interaction influences spatially globally, it can be modeled by the convolutions with suitable kernel, and various nonlocal evolution equations were proposed. Although the nonlocal evolution equations can reproduce various patterns and many applications are expected, the technique of analyzing a nonlocal evolution equations were not rich. Motivated by these backgrounds, we proposed a method to approximate the nonlocal evolution equations into reaction diffusion system in which the various theories have already been established. We revealed that the nonlocal evolutions equations with any even kernels can be approximated by a reaction diffusion system in one-dimensional spaces.

研究分野：数理解析学，現象数理学

キーワード：反応拡散系 非局所相互作用 非局所発展方程式 反応拡散近似

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

細胞生物学の分野で、魚の表皮の色素細胞において、対象までの距離に依存して働きをかえる相互作用の存在が実験的に報告された(1)。このような相互作用は空間大域的に影響を及ぼすため、適当な積分核との合成積で数式化され、発展方程式がいくつか提案されている(2,3)。この合成積による相互作用(非局所相互作用と呼ぶ)は脳の神経の発火現象[3]や動物表皮のパターン形成、生物個体の散布現象(2)等の数理モデルに応用されており、様々な現象を記述することから、この積分項付きの発展方程式(非局所発展方程式と呼ぶ)は注目され始めていた。(1)の報告において、魚の表皮の色素細胞には、活性化作用が局所的でありながら、抑制化作用が大域的である相互作用の存在が生物実験的に報告された。この相互作用は活性化作用を正の値、抑制化作用を負の値として関数に数式化され、その形状から「メキシカンハット」と呼ばれる。このメキシカンハット型の積分核を用いて、単独の非局所発展方程式の数値計算を行うと、積分核の形状を変えるだけで様々なパターンが再現されることが報告されていた。また、(2)において、積分核の形状によって、非局所発展方程式の定数定常解が不安定化を起こすことが報告されていた。これらの数値計算から得られるパターンは、縞模様や、斑点模様など反応拡散系で得られるパターンに非常に似ているが、非局所発展方程式と反応拡散系の関係は不明であった。また、積分核が与えられた時、積分核を作り出す現象の背後にある因子間の相互作用や機構を予想することは困難と予想された。非局所発展方程式の解析手法は、反応拡散系等の偏微分方程式の理論に比べると、発展途上であった。

<参考文献>

- (1) A. Nakamasu, G. Takahashi, A. Kanbe, S. Kondo, Interactions between zebrafish pigment cells responsible for the generation of Turing patterns, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 106, 8429-8434 (2009)
- (2) J. D. Murray, Mathematical Biology. I. An Introduction, vol. 17 of Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 3rd ed., (2002)
- (3) S. Amari, Dynamics of Pattern Formation in Lateral-Inhibition Type Neural Fields, Biol. Cybernetics, 27, 77-87 (1977)
- (4) A. M. Turing, The chemical basis of morphogenesis, Phil. Trans. R. Soc. Lond., B, 237, 37-72 (1952)

2. 研究の目的

この研究課題の目的は、様々な空間と境界条件上で積分核つき相互作用を反応拡散系で近似し、積分核つき相互作用をもつ発展方程式の1つの解析手法を確立することである。非局所発展方程式を様々な理論が整備されている反応拡散系に近似することで、非局所発展方程式を解析する方法を提案する。また、その応用例を作る。さらに、その反応拡散系への近似を行う際に、非局所発展方程式の積分核の形によって、反応拡散系のパラメーターがどのように決定されるか、その方法を明らかにする。

3. 研究の方法

周期境界条件が課された1次元領域上で、(1)の報告に基づいて、非局所発展方程式の枠組みの数理モデルを提案する。この非局所発展方程式に対して、複数の拡散性の補助的な活性因子と抑制因子を用意し、反応拡散系を導入する。この補助因子の重ね合わせを非局所発展方程式の合成積の部分に課し、非局所発展方程式を近似する方法を考える。反応拡散系の時間微分の前にかかっている時定数パラメーターの0極限をとることで、反応拡散系の解が非局所発展方程式の解に収束することを特異極限解析から示す。時定数パラメーターの極限をとると、補助因子の反応拡散方程式は楕円型方程式に収束することが期待できる。その楕円型方程式の基本解の重ね合わせによって、任意の積分核が近似できるかを調べる。この両者の解の収束を示すために、方程式それぞれの時間局所解の存在や、エネルギー法による時間大域解の存在証明を行う。また非局所発展方程式の解の挙動と近似する反応拡散系の解の挙動を比較するために、数値計算を行い、確認する。

同様の近似の証明を1次元ユークリッド空間の場合にも行う。さらにヤコビの直交多項式を用いることから、非局所発展方程式の積分核に対して、補助因子の反応拡散系のパラメーターを決定する方法も開発する。また、これらの理論を高次元の空間の場合に拡張できるかを調べる。

4. 研究成果

周期境界条件が課された区間において、(1)による生物学的な非局所相互作用の報告に基づいて、非局所発展方程式を提案した。任意の積分核をもつ非局所発展方程式に対して、複数の拡散性の補助的な活性因子と抑制因子を用意し、反応拡散系を導入した。その反応拡散系の時定数のパラメーターの特異極限をとることから、任意の偶な積分核をもつ非局所発展方程式の解が反応拡散系の解で近似できることを示した。この理論から、ある積分核がA. Turingが提唱した拡散誘導不安定化(4)を引き起こすことを理論的に示し、積分核つき相互作用の一つの役割を明

らかにした。さらに、数値計算から、非局所発展方程式と近似する反応拡散系の解の挙動を比較し、同じようなパターンが再現できることを確認した。非局所発展方程式は積分項を含む方程式であるが、その解が一見すると関係のない微分を含む反応拡散系で近似できることがわかった。反応拡散系はすでに多くの理論が整備されているので、反応拡散系に近似することから非局所発展方程式を解析することができると考えている。これらの結果は論文にまとめ投稿し、(5)として出版に至った。

次に、1次元ユークリッド空間においても、同様の近似が成り立つことを示した。上記の1次元周期境界条件の場合では、様々な形状の積分核をもつ非局所発展方程式を近似する反応拡散系のパラメーターが存在することを示しただけで、これらのパラメーターの具体的な表示式は得られていなかった。1次元ユークリッド空間上の問題においては、非局所発展方程式の積分核の形状によって、反応拡散系のパラメーターが陽的に決定できることを明らかにした。このことから、任意の形状の積分核をもつ非局所発展方程式に対して、その解を近似する反応拡散系を具体的に書き下すことができ、その反応拡散系で元の非局所発展方程式を解析できると考えている。この理論を利用して、与えられた積分核に対して、反応拡散系のパラメーターを決定するアルゴリズムをプログラミングし、数値計算を行った。さまざまな積分核に対して、反応拡散系のパラメーターがどのような値になるかを数値計算から求めた。これらの結果を論文としてまとめて投稿し、(6,7)として出版に至った。

<参考文献>

- (5) H. Ninomiya, Y. Tanaka, H. Yamamoto, Reaction, diffusion and non-local interaction, J. Math. Biol., 75, 1203-1233 (2017)
- (6) H. Ninomiya, Y. Tanaka, H. Yamamoto, Reaction-diffusion approximation of nonlocal interactions using Jacobi polynomials, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 35 (2), 613-651 (2018)
- (7) Y. Tanaka, H. Yamamoto, H. Ninomiya, Mathematical approach to nonlocal interactions using a reaction-diffusion system, Development Growth and Differentiation, 59, a special issue: Mathematics, Physics, and Engineering in Biology, 388-395 (2017)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Tanaka Yoshitaro, Yasugi Tetsuo, Nagayama Masaharu, Sato Makoto, Ei Shin-Ichiro	4. 巻 8
2. 論文標題 JAK/STAT guarantees robust neural stem cell differentiation by shutting off biological noise	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Scientific Reports	6. 最初と最後の頁 12484-12484
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1038/s41598-018-30929-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ninomiya Hirokazu, Tanaka Yoshitaro, Yamamoto Hiroko	4. 巻 35
2. 論文標題 Reaction diffusion approximation of nonlocal interactions using Jacobi polynomials	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 613-651
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-017-0299-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yoshitaro Tanaka, Hiroko Yamamoto, Hirokazu Ninomiya	4. 巻 59
2. 論文標題 Mathematical approach to nonlocal interactions using a reaction-diffusion system	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Development Growth and Differentiation	6. 最初と最後の頁 388-395
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1111/dgd.12354	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirokazu Ninomiya, Yoshitaro Tanaka, Hiroko Yamamoto	4. 巻 75
2. 論文標題 Reaction, diffusion and non-local interaction	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Biology	6. 最初と最後の頁 1203-1233
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00285-017-1113-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 田中吉太郎, 二宮広和, 山本宏子	4. 巻 168
2. 論文標題 非局所発展方程式の反応拡散近似	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Hokkaido university technical report series in mathematics	6. 最初と最後の頁 65-74
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 田中吉太郎, 八杉徹雄, 佐藤純, 栄伸一郎	4. 巻 173
2. 論文標題 分化の波に対する数理モデルの連続化と Planar 進行波解への数理解析	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido university technical report series in mathematics	6. 最初と最後の頁 447-456
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 田中吉太郎, 八杉徹雄, 佐藤純, 長山雅晴, 栄伸一郎	4. 巻 22
2. 論文標題 分化の波のノイズ抑制機構に対する数理モデリングと実験からのアプローチ	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 計算工学講演会論文集	6. 最初と最後の頁 D-05-5
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 田中吉太郎
2. 発表標題 Reaction-diffusion approximation for understanding pattern formations through non-local interactions
3. 学会等名 第16回生物数学の理論とその応用, 京都大学数理解析研究所 (招待講演)
4. 発表年 2019年 ~ 2020年

1. 発表者名 田中吉太郎
2. 発表標題 細胞の大きさと形状を残す空間離散モデルの連続化の提案と応用
3. 学会等名 日本応用数学会2019年度年会（招待講演）
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 Yoshitaro Tanaka
2. 発表標題 The continuation method for spatially discretized models with nonlocal interactions
3. 学会等名 ICIAM2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 田中吉太郎
2. 発表標題 円領域上の修正ヘルムホルツ方程式のノイマン境界値問題に対する精度保証付き基本解近似解法
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 田中吉太郎
2. 発表標題 Reaction-diffusion approximation for nonlocal interactions
3. 学会等名 Society for Mathematical Biology 2018（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Yoshitaro Tanaka
2. 発表標題 The theoretical approach for pattern formations based on the convolution kernels in the networks systems
3. 学会等名 Equadiff 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中吉太郎
2. 発表標題 分化の波の数理モデルに対する離散構造を保持する連続化の提案
3. 学会等名 日本応用数学会 (招待講演)
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 Yoshitaro Tanaka
2. 発表標題 The theoretical approach for pattern formations based on the convolution kernels in the networks systems
3. 学会等名 日本数理生物学会
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 田中吉太郎
2. 発表標題 分化の波に対する数理モデルの連続化と数理解析
3. 学会等名 2017年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2017年～2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Yoshitaro TANAKAのホームページ
<https://www.fun.ac.jp/~y-tanaka/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----