

令和 2 年 6 月 17 日現在

機関番号：32682

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14229

研究課題名(和文)双曲型 Threshold Dynamics：応用と数理解析

研究課題名(英文)Hyperbolic threshold dynamics: applications and analysis

研究代表者

Ginder Elliott (Ginder, Elliott)

明治大学・総合数理学部・専任准教授

研究者番号：30648217

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の成果としては、双曲型 Threshold Dynamics を用いた一般化したMBO法の作成を主に上げたい。作成したGMBOは、減衰項付き双曲型曲率流の近似解法であることが解明でき、振動する界面現象が表せることだけでなく、平均曲率流も表現できるよう構成した。具体的には、MBOの熱方程式の代わりに、波動方程式を導入し、初期速度を与えることにより界面の伝播を制御できるよう改正した。また、計算上で表すための数値解法も作成することに成功した。さらに、双曲型平均曲率流のエネルギー保存において、エネルギー保存する Minimizing Movementの設計に成功し、解法の収束性の解析も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今までの Threshold Dynamics 研究では、本研究のHMBO以外、MBO法に厳守されていた。MBOは、Level Set 法を生み出したものとして知られていたが、本研究の初期段階で作成したHMBOは、慣性の影響を含む振動する界面においてTDの適応範囲を広げることができた。GMBOはMBOとHMBOを同時に取り扱うため、応用数学と産業に関する課題が1つのTD法で表現することが可能となった。また、今までのMinimizing Movementsの研究において、エネルギー保存するものが不在だったため、本研究のCrank-Nicholson MMは異分野にも応用があると期待している。

研究成果の概要(英文)：The main result of this research is the discovery of a generalized MBO algorithm (GMBO) using hyperbolic threshold dynamics. The GMBO was found to be an approximation method for the damped hyperbolic mean curvature flow. The result enables one to approximate oscillatory interfacial motions, as well as mean curvature flow. In particular, by changing the base PDE used in the MBO to the wave equation, we were showed that the initial velocity field can be used to control the propagation of interfaces. Interestingly, this clarified that damped interfacial motions are not obtained through additional damping terms in the PDE, but by encoding normal velocity fields within level set functions at each time step. We also established working numerical methods for performing computational analyses and simulations. Here we developed an energy preserving minimizing movement for treating the hyperbolic mean curvature flow, and we confirmed the method's properties through computational investigations.

研究分野：応用数学

キーワード：Threshold dynamics interfacial motion approximation methods curvature flow

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究以前に、代表者が近年の研究で手がけていた双曲型 MBO アルゴリズム (HMO) の開発は、今回の研究基盤に当たる。この HMO は Threshold Dynamics (閾値法, TD) の新しい種であり、振動する界面現象が表現できる近似解法として周知されており、HMO の収束性についての研究結果を既に示したものである。また、計算においても minimizing movement (MM) を用いたいくつかの数值解法も作成を成していた。とりわけ、それ以前の TD 法は慣性の影響を直接に取り入れることが不可能とされていたが、HMO 研究ではいわゆる双曲型平均曲率流 (hyperbolic mean curvature flow, HMCF) の近似解法として使えるということを証明した状況であった。しかし、平均曲率流 (MCF) のような放物型の界面運動には、この HMO が適用できないことが現状であったため、MCF のような界面運動における TD 法は MBO に限られていたことが課題として上げられていた。

2. 研究の目的

まず MBO および HMO の相違点に着目し、本研究は平均曲率流と双曲型平均曲率流の両方を対象とする界面運動を表現できる TD 法を設計することに着目した。その上で数理解析においては、一般化した TD 法に該当する偏微分方程式を探索すると共に Level Set 関数に組み込まれた界面の運動方程式の記述を目指した。そして、減衰項付き HMCF のシミュレーションや数値的な収束性と誤差評価を行うための数值解法の作成も目標とした。ここで、該当となった偏微分方程式と HMCF が互いに双曲型であることが分かったため、特異点の運動 (shock motion) に対する近似解法の特徴を調べることに研究を広げ、これに関連するエネルギー保存する MM の設計にも重視した。

3. 研究の方法

数理解析と数值計算の両面から本研究の計画を実行した。数理解析においては、波動方程式の解の特徴を捉えることで、主問題について進め、界面の形状を記述用に、偏微分方程式における様々な初期条件に取り組んだ。また、波動伝播下の界面の運動が制御する数理解析を解明するために、発展方程式の初期速度に着目し、適切な発展方程式を見つけた。その後、それに対応する TD 法の収束性や、他の重要となった数値的な特徴を開示した。さらに数理解析の研究と同時に、計算手法も用いた数值実験も行なった。取り分け、候補となった近似解法の妥当性を確認するために、誤差解析を含んだ数值計算を行なった。これと平行に HMCF 用のエネルギー保存する MM に関する数理解析の研究も行なった。

4. 研究成果

本研究では、数理解析、計算技術の二つの側面において重要な結果を残すことが出来た。数理解析においては、減衰項付き双曲型平均曲率流 (DHMCF) に関する界面運動の TD 法を作成することに成功し、この作成した近似解法の収束性に関する数理解析を行うことで、数值計算ライブラリにも実装した。これらは、DHMCF のシミュレーションの発展にも繋がった。また、計算手法の数値的な収束性においても確認することが出来き、結果として、本研究が生み出した近似解法は、DHMCF の解析的な側面における大きな前進のみならず、界面現象のモデリングと数值計算手法の提供の視点からも、TD 法研究における成果を出すことができた [3, 4]。

(1) 数理解析の結果において、次の双曲型曲率流の近似解法を作成することが出来た。

$$\{\alpha V' + \beta V = -\gamma\kappa, V(0) = \Gamma_0, V'(0) = \Gamma'_0\} \quad (1)$$

ここで、 V' は界面の外向き法線加速度、 V は外向き法線速度、 κ は曲面の平均曲率、 α, β, γ は正のパラメータである。 Γ_0 は界面の初期形状を表し、 Γ'_0 は与えられた速度場である。

作成した近似解法は、次の発展方程式を利用した TD 法であることを示した。

$$\begin{cases} u_{tt} = 2(\gamma/a)\Delta u & \tau > t > 0, x \in \Omega \\ u(t=0, x) = \alpha(2d_n - d_{n-1}) & x \in \Omega \\ u_t(t=0) = -\beta d_n(x) & x \in \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & t > 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $d_k(x)$ は時間ステップ k における界面 $\partial\{u(\tau, x) > 0\}$ への符号付き距離関数であり、 $\partial_\nu u$ はノイマン境界条件を意味し、 $\tau > 0$ は小さな時間ステップを表す。

提案した TD 法の初期値である符号付距離関数のテイラー展開から解析を始め、スキームの数値的な性質を解析に基づき調べた。各時間ステップにおける界面の法線方向がずれる角度においては、最大で時間ステップに比例する誤差しか生じないことが分かり、スキームの収束性を示すことができた。具体的に、発展方程式の解の等高線 $\{u = 0\}$ は次の運動方程式に従って動くことを示せた。

$$\{\alpha V' + \beta V = -\gamma\kappa + O(\tau) \text{ (as } \tau \rightarrow 0)\} \quad (3)$$

また、アルゴリズムとして、GHMBO の TD 法は次のように簡単に表せることが出来た。

1. Γ_0 および Γ'_0 を決める.
2. $d_0(x)$ および $\Gamma_{-1} = \Gamma_0 - \tau\Gamma'_0$ を作成する
3. Γ_{-1} を用いて $d_{-1}(x)$ を作成する.
4. $k = 0$ から $k = M$ まで、以下(5)-(8)を繰り返す.
5. 発展方程式(2)を時刻 $\tau > 0$ まで解く.
6. $\Gamma_{k+1} = \partial\{u(\tau, x) > 0\}$ とする
7. Γ_{k+1} を用いて、 $d_{k+1}(x)$ を作成する
8. 発展方程式(2)の初期条件を更新する.

(2) 数値解析においては、式(1)の近似解法を有限要素法による2次元と3次元領域のための計算手法を確立できた。この手法で junction や network を持つ界面を記述するために、符号付き距離ベクトル場(SDVF)を導入し、減衰項付き多相双曲型平均曲率流のシミュレーションが可能となった。図1は3次元領域における計算結果を示している(詳細については[1]と[2]を参照)。また、シミュレーションから、減衰項の役割も確認できた。とりわけ、減衰項を追加すると衝撃波(shock wave)のような界面の特異点が滑らかになるということが解明され、界面のエネルギー減少も明らかに捉えた。また、開発したアルゴリズムに対する有限要素法に基づいたプログラムを作成し、初期界面が円の場合の収束を数値的にも確認した(図1を参照)[2]。具体的には、計算領域のメッシュサイズがゼロに近づけた時、厳密解に収束するということが分かった。

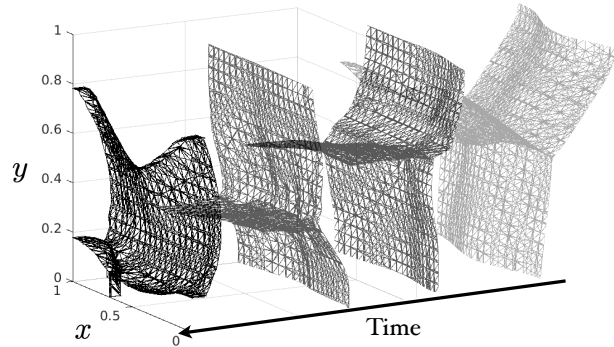


図 1: TD を用いた減衰項付き HMCF の計算結果

共同研究[2]においては、界面方程式(1)はエネルギー保存則を持つため、TD法に使用する発展方程式(2)の近似解法としてエネルギー保存する minimizing movement (MM) のスキームの開発を行なった。構成した MM は次の汎関数の最小化問題として表現できることが分かった。また、(4)のエネルギー保存に関する数値実験も行い、計算手法もこの特徴を持つということを確認することができた。

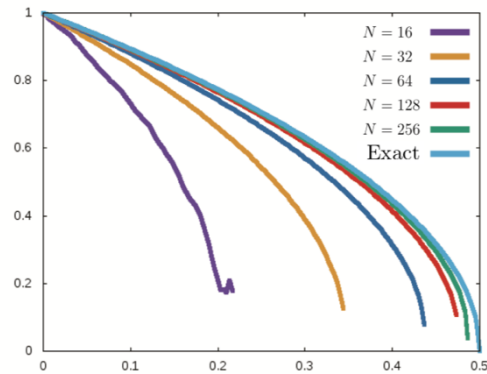


図 2 数値実験

$$F_n(u) = \int_{\Omega \cap S_m} \frac{|u - 2u_{n-1} + u_{n-2}|^2}{2h^2} dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla u_{n-2}|^2 dx \quad (4)$$

上記では、 $S_m = \{u > 0\} \cup \{u_{m-2} > 0\}$ であり、 $h > 0$ は時間ステップを表す。関数 u_0, u_1 が与えられた時、 u_n は F_n を最小化する関数である。

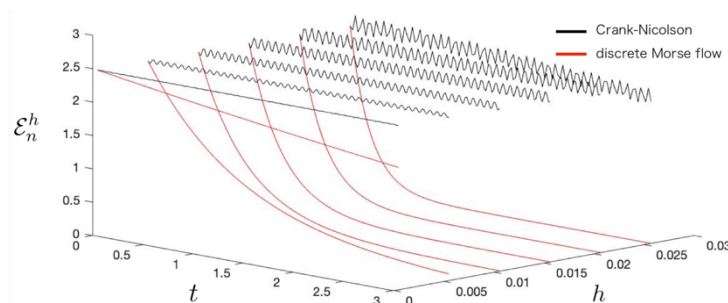


図 3 エネルギー保存する MM の収束性

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Y. Akagawa, E. Ginder, S. Koide, S. Omata, K. Svadlenka	4. 巻 2004.07458
2. 論文標題 A Crank-Nicolson type minimization scheme for a hyperbolic free boundary problem	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 arXiv (submitted, under review)	6. 最初と最後の頁 1-24
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 E. Ginder, A. Katayama	4. 巻 85
2. 論文標題 On the inclusion of damping terms in the hyperbolic MBO algorithm	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 E. Ginder, R. Kanai	4. 巻 1903.05835
2. 論文標題 A variational approach to the inverse imaging of composite elastic materials	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 arXiv (submitted, under review)	6. 最初と最後の頁 1-20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 E. Ginder, K. Kayahara, M. Kuze, M. Nagayama, S. Nakata, H. Nishimori	4. 巻 14
2. 論文標題 Synchronization of self-propelled soft pendulums	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Soft Matter	6. 最初と最後の頁 3791-3798.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Elliott Ginder
2. 発表標題 Approximation Methods for oscillatory and constrained interfacial dynamics
3. 学会等名 MSJ SI 2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Elliott Ginder
2. 発表標題 減衰項付き双曲型平均曲率流の近似解法について
3. 学会等名 表面・界面ダイナミクスの数理15 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Elliott Ginder
2. 発表標題 Multiphase optimization in phononic crystal design
3. 学会等名 Equadiff 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Research Homepage http://amth.mind.meiji.ac.jp/
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----