

令和 2 年 6 月 5 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14230

研究課題名(和文)理論数値解析と数学解析による流体方程式の研究

研究課題名(英文)Research on PDEs for fluids in terms of numerical and mathematical analysis

研究代表者

柏原 崇人(Kashiwabara, Takahito)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：80771477

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：流体の運動を表す偏微分方程式に対する数学解析と数値解析の研究を行った。数学解析としては、大気や海洋の振る舞いを記述する基礎方程式として知られるPrimitive方程式を対象として、数学的な解がきちんと存在することを示し、流体の支配方程式としてより一般的なNavier-Stokes方程式との関係を明らかにした。数値解析としては、数値シミュレーション手法の一つである有限要素法を考察し、滑らかな領域の偏微分方程式に用いられた場合における数学的正当化を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

流体の数値シミュレーションにおいては、数値計算手法の急速な発展に比べて、数学的議論を用いた正当化が追いついていない面がある。本研究課題で得られた成果は、数学解析と数値解析の両面からアプローチを行い、欠落している数学的正当化を確立することを試みたものである。経験則で確認するという側面が強かった数値シミュレーションの妥当性を数学理論の面からもサポートし、流体数理論の発展に寄与することが期待される。

研究成果の概要(英文)：We studied partial differential equations describing the motion of fluids in terms of mathematical and numerical analysis. From the viewpoint of mathematics, we considered the primitive equations which are known as fundamental equations for atmosphere and ocean. We proved that there exists a good solution to the primitive equations and explained their relation with the Navier-Stokes equations, which are more fundamental in the context of fluid dynamics. From the viewpoint of numerics, we considered the finite element method, which is one of the numerical methods to solve PDEs. We justified its use in domains with a smooth and curved boundary.

研究分野：微分方程式の数値解析

キーワード：有限要素法 Navier-Stokes方程式 領域摂動 Primitive方程式 最大正則性 Stokes-Darcy問題 不連続Galerkin法 Euler方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

流体の数値シミュレーションは、理工学の諸分野で利用されており、現代の科学技術の発展に必要不可欠なものとなっている。このような数値シミュレーションのプロセスには、離散化や数値計算に起因した誤差が混入する。その影響が重大でないことを保証することは、数値シミュレーションの正当性を担保するために極めて重要であり、数学的議論によって理論的な正当化がなされるのが理想的である。しかし、数値シミュレーション技術が急速に発展し続けている現代では、数学的正当化の議論が追いついていないのが実情である。これまでの私の研究分野と関連しているところでは、次のような問題が「数値シミュレーション技術が先行している一方で理論的正当化が不十分」という状況の範疇にあった。

- (1) 非圧縮 Euler 方程式に対する "potentially singular solution" の振る舞い
- (2) 流入出を許容する境界条件の解析
- (3) 領域近似や領域摂動を伴う有限要素法の解析
- (4) Primitive 方程式に対する数学解析

2. 研究の目的

流体の数値シミュレーションに対する数学的正当化の議論を前進させることを大目標とし、それを達成するための出発点となるような成果を得ることを本研究の大目標とする。特に、上記の背景に掲げた 4 つの研究テーマについて、数値解析と数学解析を結びつけるような理論的結果に到達することを目指す。より具体的には、各テーマの研究目的を次のように定めた。

- (1) 境界付近において「双曲型 + 旋回」の構造を持つ流れが発生するメカニズム、およびそのような流れと流速の増大現象との因果関係を明らかにすること
- (2) Navier-Stokes 方程式に応力フリー条件のような流入出を許容する境界条件を課したときの数学解析と数値解析
- (3) 領域近似や領域摂動を伴う有限要素法の誤差評価を、様々な問題や有限要素空間において実現すること
- (4) Navier-Stokes 方程式の数学理論で発展した解析半群や最大正則性を Primitive 方程式にも応用できるように理論を整備すること

3. 研究の方法

- (1) 非圧縮 Euler 方程式に対する "potentially singular solution" の解析では、「双曲型 + 旋回」の構造を持つ流れが生じるメカニズムと、「双曲型 + 旋回」の構造を持つ流れが流速の増大減少を誘発する要因を、数学解析と数値解析の両面から検証する。
- (2) 流入出を許容する境界条件の解析では、Navier-Stokes 方程式に対する応力フリー条件や、流体と多孔質媒体が界面条件を通して相互作用する Stokes-Darcy 方程式といった問題に対する有限要素スキームの開発を行う。
- (3) 領域近似を伴う有限要素法の解析では、非適合要素に対する誤差評価、および一般の L^p ノルム $\cdot W^{1,p}$ ノルムといった非エネルギーノルムによる誤差評価を、領域の近似を伴う有限要素法の場合に拡張する。

4. 研究成果

(1) 非圧縮 Euler 方程式に対する "potentially singular solution" の解析では、特性曲線有限要素法による非圧縮 Euler 方程式を解くための数値計算コードを開発し、Luo and Hou (2014, PNAS) が提案した「有限時間爆発が示唆される解」を再現し、流速そのものの増大減少を観察することができた。続いて、この数値解の可視化結果を手がかりとして、理論的な結果を証明できないか考察を続けた。非線形項を遠心力と解釈するアプローチや、粒子の軌道の曲率や撓率と非圧縮 Euler 方程式を組み合わせるアプローチを試みたものの、数値計算結果と整合しかつ数学的に証明可能な命題に到達することができず、頓挫する結果となった。しかしながら、成果が全くのゼロだったわけではないので、本研究課題の終了後も、数値解析と数学解析の両視点に適合する成果を得るため、このテーマへのアプローチを続けていく予定である。

(2) 流入出を許容する境界条件の解析について、研究計画当初は、境界上での流入が数値解の不安定性を生むかどうかということを中心に問題と考えていた。ところが、この問題は特に理論面からアプローチを行うことが非常に困難であることがわかった(たとえば応力フリー条件を課した Navier-Stokes 方程式の解が有限時間爆発するかという問題は、現時点でも未解決のまま進展がないと思われる)。そこで方針を転換し、境界条件ではなく界面条件(interfacial

transmission condition)問題を課した問題で数値計算スキームを開発するという方向で研究を進めることにした。その結果、流体と多孔質媒体が相互作用する Stokes-Darcy 問題において Beaver-Joseph-Saffman 界面条件を課した問題に対して不連続ガレルキン法によるスキームを提案することに成功した。提案手法は曲がった界面の場合にも自然に適用可能であり、さらに理論的な誤差評価が確立されているという点において、先行研究で用いられた方法よりも優位性があるといえる。

(3) 領域近似や領域摂動を伴う有限要素法の解析においては、時間非定常 Stokes 方程式の滑り境界条件問題に対する誤差評価、同定常問題に Crouzeix-Raviart 近似を適用した場合の誤差評価、そして Poisson 方程式および熱方程式の Neumann 境界条件問題に対する最大値ノルムによる誤差評価という 3 つの課題を考察し、一定の状況下で最良オーダー収束が得られることを示した。特に、滑らかな領域における最大値ノルム誤差評価の結果は、先行研究では凸領域かつディリクレ境界条件の場合に限られていたものを、非凸領域かつ Neumann 境界条件の場合に拡張するもので、その手法は今後様々な方向に拡張・発展させることができるものと期待している。

(4) Primitive 方程式の数学解析については、解析半群理論に加えて最大正則性の理論を整備した。さらに、放物型方程式と同様な平滑化効果を持つことを示した。また、初期値問題に対する時間大域解の理論を応用して、任意の外力と周期が与えられたときに、時間周期解が少なくとも 1 つ存在することを示した。初期値に微分可能性を仮定しない場合にも、時間大域的な解の一意存在定理を拡張することができた。最後に、アスペクト比が 0 になる極限において Navier-Stokes 方程式(ただし鉛直方向の粘性係数はアスペクト比の 2 乗のオーダーであるとする)が Primitive 方程式に収束することをシンプルな証明で得ることに成功した。以上の結果は、Neumann 境界条件(この場合は周期境界条件に帰着できる)だけでなく、より難しい Dirichlet 境界条件の場合にも適用可能であるという点において、先行研究よりも汎用性が高いと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Giga Yoshikazu, Gries Mathis, Hieber Matthias, Hussein Amru, Kashiwabara Takahito	4. 巻 145
2. 論文標題 Bounded H^{∞} -calculus for the hydrostatic Stokes operator on L^p -spaces and applications	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3865 ~ 3876
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/13676	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Zhou Guanyu, Kashiwabara Takahito, Oikawa Issei	4. 巻 62
2. 論文標題 A penalty method for the time-dependent Stokes problem with the slip boundary condition and its finite element approximation	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Applications of Mathematics	6. 最初と最後の頁 377 ~ 403
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.21136/AM.2017.0328-16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Galdi Giovanni P, Hieber Matthias, Kashiwabara Takahito	4. 巻 30
2. 論文標題 Strong time-periodic solutions to the 3D primitive equations subject to arbitrary large forces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 3979 ~ 3992
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6544/aa8166	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kashiwabara Takahito, Oikawa Issei, Zhou Guanyu	4. 巻 53
2. 論文標題 Penalty method with Crouzeix-Raviart approximation for the Stokes equations under slip boundary condition	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis	6. 最初と最後の頁 869 ~ 891
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1051/m2an/2019008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Zhou Guanyu, Kashiwabara Takahito, Oikawa Issei, Chung Eric, Shiue Ming-Cheng	4. 巻 36
2. 論文標題 Some DG schemes for the Stokes-Darcy problem using P1/P1 element	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 1101 ~ 1128
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-019-00377-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kashiwabara Takahito, Kemmochi Tomoya	4. 巻 144
2. 論文標題 Pointwise error estimates of linear finite element method for Neumann boundary value problems in a smooth domain	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Numerische Mathematik	6. 最初と最後の頁 553 ~ 584
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00211-019-01098-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kashiwabara Takahito, Kemmochi Tomoya	4. 巻 89
2. 論文標題 Stability, analyticity, and maximal regularity for parabolic finite element problems on smooth domains	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics of Computation	6. 最初と最後の頁 1647 ~ 1679
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/mcom/3500	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Giga Yoshikazu, Gries Mathis, Hieber Matthias, Hussein Amru, Kashiwabara Takahito	4. 巻 279
2. 論文標題 The hydrostatic Stokes semigroup and well-posedness of the primitive equations on spaces of bounded functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 108561 ~ 108561
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2020.108561	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Giga Yoshikazu, Gries Mathis, Hieber Matthias, Hussein Amru, Kashiwabara Takahito	4. 巻 293
2. 論文標題 Analyticity of solutions to the primitive equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 284 ~ 304
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.201700401	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計20件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 13件)

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Several remarks on L^∞ -type error estimates of the finite element method
3. 学会等名 International Workshop on Numerical Methods for Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Semigroup and maximal regularity approach to the primitive equations
3. 学会等名 Conference on Mathematical Fluid Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 The Navier-Stokes equations with slip or leak boundary conditions of friction type
3. 学会等名 CoMFos18 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Finite element analysis for a generalized Robin boundary value problem in a smooth domain
3. 学会等名 East Asia SIAM Conference (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柏原崇人
2. 発表標題 滑らかな領域における楕円型・放物型ノイマン境界値問題に対する有限要素法の L^∞ 誤差評価について
3. 学会等名 数値解析セミナー (東京大学)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Penalty method with Crouzeix--Raviart approximation for the Stokes equations under slip boundary condition
3. 学会等名 The 7th China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柏原崇人
2. 発表標題 Navier-Stokes方程式に対する摩擦型境界条件とその周辺
3. 学会等名 応用解析セミナー (東京大学)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柏原崇人
2. 発表標題 非一様メッシュにおける有限要素法の L^∞ 型誤差評価について
3. 学会等名 RIMS共同研究「次世代の科学技術を支える数値解析学の基盤整備と応用展開」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Semigroup and maximal regularity approach to the primitive equations
3. 学会等名 Forum in Nonlinear PDEs from Oceanic and atmospheric dynamics and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柏原崇人
2. 発表標題 滑らかな領域における楕円型・放物型ノイマン境界値問題に対する有限要素法の L^∞ 誤差評価について
3. 学会等名 大分大学解析セミナー(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 On the semigroup approach to the primitive equations
3. 学会等名 MFO Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Some remarks on Luo-Hou's potentially singular solution for the 3D Euler equations
3. 学会等名 PDE Seminar, Chung-ang University (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 柏原崇人
2. 発表標題 プリミティブ方程式に対する解析半群の方法について
3. 学会等名 第6回岐阜数理科学研究会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Global strong well-posedness of the primitive equations in $L^\infty_{xy}L^p_z$ -type spaces
3. 学会等名 The 15th Japanese--German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Finite element analysis for a generalized Robin boundary value problem in a smooth domain
3. 学会等名 Numerical Analysis: Applications to Biomedical Problems and Foundations (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Finite element analysis for a generalized Robin boundary value problem in a smooth domain
3. 学会等名 International Congress on Industrial and Applied Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Some property of the L^2 -projection to P_1 functions and its application to 1D characteristic FEM
3. 学会等名 International Congress on Industrial and Applied Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Semigroup and maximal regularity approach to the primitive equations
3. 学会等名 RIMS Gasshuku-style Seminar "Physical and mathematical applications to geophysical fluid problems"
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Remarks on the regularity of slip boundary value problems of friction type
3. 学会等名 Evolution Equations: Applied and Abstract Perspectives -in honour of Matthias Hieber's 60th birthday- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Remarks on the regularity of slip boundary value problems of friction type
3. 学会等名 Russia-Japan Workshop "Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考