

令和 3 年 5 月 9 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14233

研究課題名（和文）非正則な統計モデルに対する客観ベイズ法に関する研究

研究課題名（英文）Objective Bayes methods for non-regular statistical models

研究代表者

橋本 真太郎 (Hashimoto, Shintaro)

広島大学・先進理工系科学研究科（理）・准教授

研究者番号：60772796

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：ベイズ統計学における客観的な事前分布の選択に関する研究を行った。特に、非正則モデルに対して3つのアプローチで客観事前分布を導出し、その性質を研究し、成果を発表した。関連する研究として、研究協力者とともに外れ値に頑健なベイズ推定における理論と方法論について客観事前分布の導出も含めて研究を行い、成果を発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ベイズ統計学においては事前分布の選択が重要であり、理論的根拠を備えた事前分布の選択法はベイズ統計学の客観的な利用において必須である。特に、理想的な条件が成り立っていない非正則な状況は実際問題では自然であるが従来の統計理論が使えないため、事前分布の観点から新たな知見を与えたことは意義あることである。

研究成果の概要（英文）：I studied the selection of objective priors in Bayesian statistics. In particular, I derived objective priors and studied these properties for non-regular models by using three approaches. As a related study, we studied the theory and methodology for robust Bayesian inference with my collaborators.

研究分野：数理統計学

キーワード：ベイズ統計学 統計数学 客観事前分布 非正則モデル 高次漸近理論

## 1. 研究開始当初の背景

ベイズ統計学における事前分布の選択問題は本質的問題であり、これまで多く研究されてきた。特に、事前情報が少ない場合や推測結果に頻度論的妥当性を持たせたい場合には、客観事前分布と呼ばれる事前分布が用いられることが多く、文脈に応じて適切な客観事前分布を用いる必要がある。このように、ベイズ分析に客観性を持たせようとする枠組みを客観ベイズ法と呼ぶことがあり、ベイズ分析の学会である国際ベイズ分析学会 (ISBA) においても Objective Bayes section として一つの分科会が存在している。ベイズ法を客観的に分析することはベイズ法と頻度論の関係性を解明することにも役立つ。さらに、客観的なベイズ的手法を用いることにより、推測結果に頻度論的妥当性を持たせつつ、ベイズ的アプローチにより推測の不確実性の定量化 (uncertainly quantification) を行うことが可能となる。客観事前分布として最も有名なものはジェフェリーズ事前分布と呼ばれるものであり、この事前分布を正当化する方法は適切な正則条件を仮定したもとのこれまでたくさん議論されてきた。しかしながら、現実問題においてはこのような理想的な正則条件が常に成り立つとは限らず、そのような場合には従来の統計理論の適用に限界が生じる。例えば、本研究で扱っている確率密度関数がジャンプを持つような切断分布族などが代表的な非正則モデルの例である。本研究では、非正則な場合の客観事前分布を情報理論や頻度論的妥当性の観点から導くことにより、非正則モデルにおける客観的な事前分布の選択の指針を与える。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、客観ベイズ法において重要な客観事前分布を非正則なモデルに対して構築し、その性質を研究することにある。本研究で考える非正則モデルは、例えば経済学におけるオークションモデルのような密度にジャンプを持ち、そのジャンプが重要な情報を持つような場合に有用である。本研究課題は理論研究がメインなので実問題への応用は将来の課題であるが、研究が成功すれば様々な分野に対して適用が可能になると考えている。

## 3. 研究の方法

本研究において鍵となるものは、事後分布の高次の漸近理論である。正則条件のもとでは事後分布はサンプルサイズが十分大きいときには事前分布によらず正規分布に収束することが知られている。一方で、本研究で考えている非正則モデルはサンプルサイズが十分大きいときには事後分布が指数分布に収束し、これもまた事前分布に依存しないことが知られている。一つ目の研究はこの事後分布の一次の漸近分布に着目し、情報理論の観点から客観事前分布を導くことにある。

- (1) 事前分布と事後分布の間の差異をアルファ・ダイバージェンスと呼ばれる情報量で測り、それを漸近的に最大にするような事前分布を導出する方法 (参照事前分布の一般化)。事前分布と事後分布の間の距離が最も大きくなるような事前分布を考えることによりできるだけ主観的な情報をなくすことができる。特に、局外母数を含むような多母数の場合をこの研究では考える。

一方で、高次漸近理論の観点で事前分布を正当化するにはもう少し精密な近似を与える必要があり、それを与えるのが漸近展開である。実際、事後分布の漸近展開をすると高次の項において事前分布の影響が現れる。そこに着目し、次の2つの方法により客観事前分布を導くことを行う。

- (2) ベイズ法と頻度論における推定量を漸近的に一致させるように事前分布を定める方法 (モーメント一致事前分布)。ベイズ推定量と (バイアス補正した) 最尤推定量を高次のオーダーで一致させるような事前分布を導出することによりベイズ法と頻度論における推定結果を高次のオーダーで一致させることが可能となる。
- (3) 事後予測信用領域が頻度論的被覆を高次のオーダーで達成するよう事前分布を導くこと (予測型確率一致事前分布)。推定の枠組みで議論されることの多い確率一致事前分布を予測の観点から導出する。予測信用区間が頻度論的な被覆確率を達成するよう事前分布を導出することにより頻度論的な性質を持つようなベイズ予測区間を構成できる。

これらの方法により得られた客観事前分布がどのような性質を持つかという問題も重要である

ため、それらについても研究を行う。具体的には、得られた客観事前分布がパラメータ変換に関する事前分布の不変性を持つか否かを調べる。また、一般に客観事前分布は確率分布になることが少なく、そのときに事後分布が確率分布になるか (posterior propriety) について調べることである。さらに、具体例において客観事前分布がどのような形になるのかを計算する (シフトされた指数分布を含むような非正則な位置母数分布族や、一様分布を含むような尺度母数分布族、切断ワイブル分布や切断正規分布を含むような切断分布族など)。

#### 4. 研究成果

本研究では、確率密度関数の台が未知母数に依存するような非正則な統計モデルに対して、「3. 研究の方法」で述べた三つの方法により客観事前分布を導出し、その性質や相互の関係性について議論することによりその統計モデルの客観ベイズ的な構造を解明した。研究成果として、「3. 研究の方法」における(1), (2), (3)のそれぞれに対する結果を3報の論文にまとめ、国際的学術誌に採択・掲載された。これらは全て単著としての研究である。研究成果の概要を以下に述べる。

- (1) Hashimoto (2021a)では、局外母数を持つような多母数の非正則モデルに対して、アルファ・ダイバージェンスと呼ばれるカルバック・ライブラーダイバージェンスを含むより一般的な尺度のもとで参照事前分布を導出した。ダイバージェンスを一般化することによりどのくらい結果が変わるのかが興味深いところであり、実際にそれらの差異を検証し位置尺度母数分布族の場合に興味深い結果を得ることができた。しかしながら、この方法で得られた参照事前分布は一般にパラメータ変換に関する不変性を持たないことがわかったが、多くの場合で事後分布は確率分布になることが証明できた。正則な場合の結果として、Liu et al. (2014)があるが、非正則な場合にはある特殊な現象が起こることも確認できた。
- (2) Hashimoto (2019)では、モーメント一致事前分布を一母数と多母数の場合に導出した。得られる事前分布は一母数の場合はある微分方程式、多母数の場合はある偏微分方程式の解として得られる。一母数の場合は、非正則な場合のジェフリーズ事前分布に対応する事前分布とは異なる事前分布が現れることがわかり、それはパラメータ変換に関する不変性を持たないことがわかった。これは、得られた事前分布の形は異なるが正則な場合の結果である Ghosh and Liu (2011)とも同様の結論となり、この観点での客観事前分布の意義についてはさらなる検証が必要となると考える。多母数の場合はさらに複雑になるが、具体例においてモーメント一致事前分布の計算を行い、事後分布が確率分布になるための条件を導出した。
- (3) Hashimoto (2021b)では、ベイズ予測の観点から信用区間が被覆確率を達成するような事前分布を一母数・多母数の非正則モデルに対して導出した。推定の観点における確率一致事前分布は Ghosal (1999)で導出されており、それは非正則な場合のジェフェリーズ事前分布に対応する不変性を持つ事前分布となることが知られている。また、正則な場合での予測の観点からの確率一致事前分布の研究は Datta et al. (2000)で行われており、一母数の場合はそのような事前分布が存在するならばそれはジェフェリーズの事前分布になることが示されていた。非正則な場合にはそのような一般論を展開することが困難であり、予測における確率一致事前分布が非正則な場合のジェフェリーズ事前分布に一致するような例を与えることを考えた。結果として、非正則な位置母数・尺度母数分布族に対してはこれが肯定的に解決された一方で、切断正規分布のような例を考えるとこれは否定的な結果となるという面白い結果を得た。また、局外母数が存在しないような多母数の場合にも結果を拡張した。

	regular	non-regular
Ref	Bernardo (1979, JRSSB)	Ghosal & Samanta (1997, S&D)
GRef	Liu et al. (2014, BA)	<b>Hashimoto (2021, JSPI)</b>
PMP	Welch & Peers (1963, JRSSB), Tibshirani (1989, Bka)	Ghosal (1999, Bka)
pPMP	Datta et al. (2000, AoS)	<b>Hashimoto (2021, SPL)</b>
MM	Ghosh & Liu (2011, Sankhya)	<b>Hashimoto (2019, JSPI)</b>

一方で、当初は予定にはなかった研究成果もいくつか挙げられた。データ分析においては外れ値の問題は重要であり、特にサンプルサイズやデータの次元数が多い場合に手動で処理することは非常に難しい。そこでベイズ統計学の立場からデータの外れ値を自動的に除去できるような方法を提案し、事後分布の理論的性質や高次元回帰問題への拡張、効率的な計算アルゴリズムの開発、客観事前分布の導出を研究協力者2名と行った。研究成果は3報の論文にまとめ、いずれも共著で国際学術誌に採択・掲載された。また、開発したアルゴリズムのソースコードはwebsiteで公開し、誰でも使えるようにしている。以下、3つの研究成果を(4)、(5)、(6)とし、その成果を以下に述べる。

- (4) Nakagawa and Hashimoto (2020)では、ガンマ・ダイバージェンスに基づく外れ値に対して頑健なベイズ推定の理論と方法論の研究成果を挙げた。ガンマ・ダイバージェンスに基づく一般事後分布をベイズ更新の合理性を持つ形で提案し、事後分布の漸近性質を導出した。また、影響関数に基づく局所的な感度分析と数値実験も与え、正規分布の平均と分散の同時推定において先行研究よりも優れた結果を得ることができた。
- (5) Hashimoto and Sugasawa (2020)では、ガンマ・ダイバージェンスに基づく高次元のベイズ線形回帰モデルを提案し、事後分布の効率的な計算アルゴリズムを与えた。事後分布は非常に複雑になり、標準的なマルコフ連鎖モンテカルロ法では計算は困難であるため、ベジアン・ブートストラップに基づくランダムな目的関数の最小化による事後サンプリング方法をギブスサンプリングの内部に埋め込んだ新たな方法を提案し、数値実験や実データ解析により提案手法の有用性を示した。
- (6) Nakagawa and Hashimoto (2021)では、ガンマ・ダイバージェンスに基づくベイズ推定における客観事前分布について研究し、ガンマ・ダイバージェンスを用いる場合はデータの汚染率が十分小さいという仮定を置くことなしに客観事前分布を導出することができることがわかった。これは、ガンマ・ダイバージェンスと共によく用いられるべき密度ダイバージェンスでは成り立たない性質であり、ダイバージェンスを用いたベイズ法における客観的な事前分布の選択の指針を与えるものである。数値実験によりその有用性も検証した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 9件）

1. 著者名 Hashimoto Shintaro	4. 巻 174
2. 論文標題 Predictive probability matching priors for a certain non-regular model	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Statistics & Probability Letters	6. 最初と最後の頁 109096 ~ 109096
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spl.2021.109096	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hashimoto Shintaro	4. 巻 213
2. 論文標題 Reference priors via $\epsilon$ -divergence for a certain non-regular model in the presence of a nuisance parameter	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Planning and Inference	6. 最初と最後の頁 162 ~ 178
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jspi.2020.11.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Koike Ken-ichi, Hashimoto Shintaro	4. 巻 23
2. 論文標題 Improvement of Bobrovsky-Mayor-Wolf-Zakai Bound	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Entropy	6. 最初と最後の頁 161 ~ 161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/e23020161	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nakagawa Tomoyuki, Hashimoto Shintaro	4. 巻 23
2. 論文標題 On Default Priors for Robust Bayesian Estimation with Divergences	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Entropy	6. 最初と最後の頁 29 ~ 29
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/e23010029	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hashimoto Shintaro, Sugasawa Shonosuke	4. 巻 22
2. 論文標題 Robust Bayesian Regression with Synthetic Posterior Distributions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Entropy	6. 最初と最後の頁 661 ~ 661
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/e22060661	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 小池健一, 橋本真太郎	4. 巻 2157
2. 論文標題 Bobrovsky-Mayor-Wolf-Zakaiの下界の改良	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 31-38
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hashimoto Shintaro	4. 巻 203
2. 論文標題 Moment matching priors for non-regular models	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Planning and Inference	6. 最初と最後の頁 169 ~ 177
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jspi.2019.03.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 橋本真太郎	4. 巻 2133
2. 論文標題 一般ベイズ更新に基づく統計的推論の最近の発展について	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 50-55
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nakagawa Tomoyuki, Hashimoto Shintaro	4. 巻 49
2. 論文標題 Robust Bayesian inference via $\phi$ -divergence	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Statistics - Theory and Methods	6. 最初と最後の頁 343 ~ 360
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/03610926.2018.1543765	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shintaro Hashimoto	4. 巻 2091
2. 論文標題 Objective priors via moment matching criterion for non-regular models	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 55-64
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shintaro Hashimoto	4. 巻 12
2. 論文標題 Robust estimation of skew-normal distribution with location and scale parameters via log-regularly varying functions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Journal of Statistics and Systems	6. 最初と最後の頁 813-822
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 中川智之, 橋本真太郎	4. 巻 2047
2. 論文標題 Comparison of two robust Bayes estimations using the divergence	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 55-66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 橋本真太郎	4. 巻 2047
2. 論文標題 Robust estimation of location and scale parameters for skew-normal distribution using log-Pareto function	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 67-76
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 橋本真太郎
2. 発表標題 Robust Bayesian modeling with synthetic posterior
3. 学会等名 広島大学統計金曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shintaro Hashimoto
2. 発表標題 Moment matching priors for non-regular models
3. 学会等名 EAC-ISBA 2019 conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shintaro Hashimoto
2. 発表標題 Moment matching priors for non-regular cases
3. 学会等名 2019年度統計関連学会連合大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shintaro Hashimoto
2. 発表標題 一般事後分布に基づくベイズ推論とその応用
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shintaro Hashimoto
2. 発表標題 Robust Bayesian estimation based on gamma-divergence
3. 学会等名 2018 ISBA World Meeting（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shintaro Hashimoto
2. 発表標題 Robust Bayesian inference via weighted likelihood functions
3. 学会等名 York - Hiroshima Joint Symposium 2018`Statistical Penalisation Methods and Dimension Reduction Methods for Economic and Financial Analysis"（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shintaro Hashimoto
2. 発表標題 Robust parameter estimation based on quasi-posterior distributions
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）「高次元量子雑音の統計モデリング」（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 橋本真太郎
2. 発表標題 非正則な確率分布族に対するmoment matching priorについて
3. 学会等名 RIMS共同研究による研究会"Statistical Inference and Modelling" (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 橋本真太郎
2. 発表標題 Asymptotic properties and robustness for the Bayes estimator based on the divergence
3. 学会等名 2017年度統計関連学会連合大会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shintaro Hashimoto
2. 発表標題 Statistical inference in terms of Bayesian inverse problem
3. 学会等名 Workshop for young scholars Control and inverse problems on waves, oscillations and flows -Mathematical analysis and computational methods- (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 橋本真太郎
2. 発表標題 ダイバージェンスに基づくベイズ推定量の漸近的性質とロバスト性について
3. 学会等名 統計サマーセミナー2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shintaro Hashimoto
2. 発表標題 Robust Bayesian inference based on quasi-posterior distributions
3. 学会等名 Statistics seminar in Radiation Effects Research Foundation (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------