

令和 4 年 6 月 7 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14239

研究課題名（和文）閉曲面上の5-染色的局所平面的三角形分割グラフの存在性と弱Grunbaum予想

研究課題名（英文）Existence of 5-chromatic locally planar triangulations on closed surfaces and the weak Grunbaum's conjecture

研究代表者

野口 健太 (Noguchi, Kenta)

東京理科大学・理工学部情報科学科・講師

研究者番号：50748613

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：グラフ理論における、閉曲面上に埋め込まれたグラフの研究を行った。とくに、三角形分割グラフと四角形分割グラフと呼ばれるグラフの族に対し、次の研究成果を得た。

(1) 三角形分割グラフと四角形分割グラフの関係を、染色数の観点から記述した。(2) 種数の小さい閉曲面において、任意の偶三角形分割グラフがGrunbaum彩色をもつことを示した。(3) 1-交差埋め込みと呼ばれるグラフの再埋蔵構造について解析した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
数学におけるグラフ理論分野の理論研究を発展させた。

研究成果の概要（英文）：In this research, we investigated graphs embedded on surfaces. Especially, for triangulations and quadrangulations, we did the following:

(1) describing the relationship between them in terms of the chromatic number, (2) showing that every even triangulation of a surface with non-negative Euler characteristic has a Grunbaum coloring, and (3) analysing re-embedding structure of 1-embedded graphs.

研究分野：グラフ理論

キーワード：グラフ理論 閉曲面 グラフ彩色

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

グラフ彩色の分野において、閉曲面上に埋め込まれたグラフの染色数を調べる研究が盛んに行われている。任意の平面グラフは「四色定理」により染色数が4以下となるが、閉曲面 S 上のグラフでは S の種数に応じた色数が必要となる例が知られている。しかし「局所平面的グラフ」と呼ばれる平面グラフに近い構造をもつ閉曲面上のグラフは、染色数が5以下であることが知られている。この結果は最善だが、染色数が5である局所平面的グラフの族は二つしか知られていない。そのため局所平面的グラフの大部分は染色数が4以下であることが期待され、局所平面的グラフと平面グラフがどのくらい“近い”かという指標を探す研究がいくつか行われていた。

2. 研究の目的

本研究では、

- (1) 染色数が5である局所平面的グラフの新たな発見（または非存在性の証明）を一大目標とした。またそれに関連する、局所平面的グラフと平面グラフの染色数の意味での“近さ”について様々な角度から研究を行った。とくに閉曲面上のグラフにおいて、平面グラフに対する四色定理の類似が成り立つかどうかに関心をもち、実現可能性の比較的高いと思われる目標として、以下の二つを掲げた。
 - (2) Grunbaum 彩色と呼ばれる三角形分割グラフの辺着色に関する「弱 Grunbaum 予想」の（部分的）解決
 - (3) 三角形分割グラフが二部的な全域四角形分割部分グラフをもつかどうかに関する「Kundgen-Ramamurthi 予想」の（部分的）解決

3. 研究の方法

閉曲面上のグラフに関する様々な既存の手法を精査し、さらに独自のアイデアを組み込むことで問題解決を図った。とくに本研究の主対象となる二つのグラフの族「三角形分割グラフ」と「四角形分割グラフ」において、染色数を分類・決定するための既存の手法のうち、曲面の基本群を利用したものとグラフの局所変形に関するものを重点的に調べ上げた。その上で四角形分割グラフを三角形分割グラフへ「拡張する」問題と、三角形分割グラフから四角形分割グラフを「全域部分グラフとして探す」問題という対となる概念を軸とした研究代表者の研究蓄積を精査し、研究の目的における(1), (2), (3)に取り組んだ。

4. 研究成果

(1) 弱 Grunbaum 予想に関する結果。 S を球面、射影平面、トーラス、クラインの壺のいずれかの閉曲面とする。 S 上の任意の偶三角形分割グラフが Grunbaum 彩色をもつことを示した。また、上記4つ以外の閉曲面においては、Grunbaum 彩色をもたない偶三角形分割の無限系列が存在することを示した。三角形分割グラフが偶（全ての頂点の次数が偶数）という強い仮定の下であるが、閉曲面ごとの振る舞いが完全に決定された興味深い結果である。

(2) Kundgen-Ramamurthi 予想に関する結果。トーラス上の偶三角形分割グラフが二部的な全域四角形分割部分グラフをもつための必要十分条件を得た。またこの系により、辺幅が4以上の任意のトーラス上の偶三角形分割グラフが全域四角形分割部分グラフをもつことを示した。これは既存の研究の拡張となっており、辺幅が4以上の場合局所平面的グラフと平面グラフが“近い”関係をもつことを示唆する重要な結果である。

さらに対となる概念である四角形分割から三角形分割グラフへ拡張する問題において、（任意の閉曲面上の）四角形分割グラフに対し、3-彩色可能な三角形分割グラフへ拡張可能であるための必要十分条件を与えた。

(3) 三角形分割グラフと四角形分割グラフに密接な関係がある、1-交差埋め込みされたグラフの族に関する結果。平面に最適1-交差埋め込みされたグラフが四角形分割として再埋蔵される閉曲面は、有限個の自明な例外を除くすべての閉曲面であることを示した。一方で三角形分割として再埋蔵しようとする、向き付け不可能閉曲面においては任意の閉曲面で達成不可能であることを示した。結果として、任意の向き付け可能閉曲面で達成可能であるという先行研究と合わせて、三角形分割または四角形分割として再埋蔵可能な閉曲面の完全分類を行うことができた。

さらに射影平面に最適1-交差埋め込みされたグラフにおいて、三角形分割として再埋蔵可能かどうかという同様の問題も解決した。

(4) 全域部分グラフに関する結果。3-正則における次数2の頂点をもたない全域木(HIST)の存在性に関する研究を行った。とくにフラーレンと呼ばれる平面グラフとトーラス上の六角形分割グラフにおいて、HISTをもつ無限系列の存在を示した。

(5) グラフの向き付けに関する結果．グラフの辺の向き付けから得られる彩色について研究を行った．3-連結平面二部グラフにおける染色数の既存の上界を，最善の値まで下げることができた．またその結果は 3-連結よりも弱い仮定である最小次数 3 以上の下で成り立つが，その次数条件が最善であることを示した．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 7件）

1. 著者名 Kengo Enami, Kenta Noguchi	4. 巻 37
2. 論文標題 Embeddings of a graph into a surface with different weak chromatic numbers	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 435-444
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-020-02256-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kenta Noguchi	4. 巻 279
2. 論文標題 Proper 3-orientations of bipartite planar graphs with minimum degree at least 3	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 195-197
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2019.10.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Atsuhiko Nakamoto, Kenta Noguchi, Kenta Ozeki	4. 巻 33
2. 論文標題 Extension to 3-colorable triangulations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1390-1414
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/17M1135505	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Taku Nagasawa, Kenta Noguchi, Yusuke Suzuki	4. 巻 89
2. 論文標題 No optimal 1-planar graph triangulates any non-orientable closed surface	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 350-360
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22255	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atsuhiko Nakamoto, Kenta Noguchi, Kenta Ozeki	4. 巻 93
2. 論文標題 Spanning bipartite quadrangulations of even triangulations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 267-287
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22400	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ryota Matsubara, Haruhide Matsuda, Nana Matsuo, Kenta Noguchi, Kenta Ozeki	4. 巻 342
2. 論文標題 [a,b]-Factors of graphs on surfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1979-1988
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2019.03.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kenta Noguchi	4. 巻 69
2. 論文標題 Optimal 1-planar graphs which quadrangulate other surfaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 The Australasian Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 169-173
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Michal Kotrbčik, Naoki Matsumoto, Bojan Mohar, Atsuhiko Nakamoto, Kenta Noguchi, Kenta Ozeki, Andrej Vodopivec	4. 巻 87
2. 論文標題 Grunbaum colorings of even triangulations on surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 475-491
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22169	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Taku Nagasawa, Kenta Noguchi, Yusuke Suzuki	4. 巻 19
2. 論文標題 Optimal 1-embedded graphs which triangulate other surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 The proceedings of the conference NAO-Asia 2016	6. 最初と最後の頁 1759-1770
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Arthur Hoffmann-Ostenhof, Kenta Noguchi, Kenta Ozeki	4. 巻 89
2. 論文標題 On homeomorphically irreducible spanning trees in cubic graphs	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 93-100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22242	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計15件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Kenta Noguchi
2. 発表標題 Spanning bipartite subgraphs of triangulations of a surface
3. 学会等名 8th European Congress of Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 野口 健太
2. 発表標題 平面的グラフの proper orientation number
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 野口 健太
2. 発表標題 空間グラフの領域交差交換について
3. 学会等名 第32回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kenta Noguchi
2. 発表標題 Extension of a quadrangulation to triangulations, and spanning quadrangulations of a triangulation
3. 学会等名 The 2nd East Asia Workshop on Extremal and Structural Graph Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 野口 健太
2. 発表標題 平面的2部グラフの proper orientation number
3. 学会等名 第31回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 野口 健太
2. 発表標題 1-平面的グラフの連結度と全域部分グラフ
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 野口 健太
2. 発表標題 1-平面的グラフの連結度とハミルトン性
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenta Noguchi
2. 発表標題 Re-embedding an optimal 1-planar graph into a triangulation or a quadrangulation
3. 学会等名 30th Workshop on Topological Graph Theory (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenta Noguchi
2. 発表標題 HISTs in graphs on surfaces
3. 学会等名 The Fourth Japan-Sino Symposium on Graph Theory, Combinatorics and Their Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 野口 健太
2. 発表標題 曲面上のグラフとHIST
3. 学会等名 2018年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 野口 健太
2. 発表標題 フラールングラフのHISTについて
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications(JCCA-2017)・離散数学とその応用研究集会2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野口 健太
2. 発表標題 完全グラフの偶角形分割埋め込みの最小種数
3. 学会等名 5th Pacific Workshop on Discrete Mathematics
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野口 健太
2. 発表標題 完全グラフの偶角形分割埋め込みとカレントグラフ
3. 学会等名 第29回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野口 健太
2. 発表標題 偶三角形分割におけるサイズの大きな二部の全域部分グラフ
3. 学会等名 2017年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野口 健太
2. 発表標題 偶三角形分割における辺数の大きな二部的全域部分グラフ
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------