

令和 3 年 6 月 23 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K17585

研究課題名(和文)流れ問題のための高精度粒子法の開発と数学的正当化

研究課題名(英文) A development of a particle method with high accuracy for flow problems and its mathematical justification

研究代表者

井元 佑介 (Imoto, Yusuke)

京都大学・高等研究院・特定助教

研究者番号：60793982

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：関数解析・偏微分方程式論・離散幾何などの数学理論に基づいて、粒子法の近似微分作用素に対する打ち切り誤差評価や熱方程式やPoisson方程式に対する粒子法の誤差評価を得た。また、非圧縮性流れ(Navier-Stokes方程式)に対する粒子法の安定性評価も得た。これらの結果をもとに、安定性条件を緩和する改良手法の開発や、その数学的解釈を与えることができた。さらに、工学者と共同で改良手法を鉛直噴流実験や土砂流れ実験などの実問題に適用し、改良手法が従来手法より安定かつ高精度に計算できることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は粒子法の数学解析の先駆的な研究であり、本研究の成果により、差分法や有限要素法のような代表的な偏微分方程式の数値解析手法と同様に数学的側面からの研究の発展が期待できる。また、粒子法の数学的理解が深まることで、粒子法のパラメータの設定方法の明確化による高汎化、あるいは粒子法の精度面の改良による高信頼化などが期待できる。その結果、粒子法による流体シミュレーションに基づく高信頼なハザードマップの作成や、防波堤の設計といった防災研究への貢献も期待できる。

研究成果の概要(英文)：We have established the truncation error estimates of approximate differential operators and error estimates of the particle method for heat and Poisson equations based on mathematical analysis such as functional analysis, partial differential equation analysis, and discrete geometry. Besides, the stability analysis of particle methods for incompressible flow problems has been obtained. From these mathematical results, we have developed improved methods that can reduce the stability conditions and have presented their mathematical interpretations. Moreover, in collaboration with engineers, we have applied the improved methods to practical problems such as vertical-jet flow and sediment flow experiments, and have shown the proposed method can obtain highly accurate and stable results rather than conventional methods.

研究分野：応用数学

キーワード：偏微分方程式の数値解析 数値流体力学 粒子法

1. 研究開始当初の背景

SPH 法や MPS 法のような粒子法は偏微分方程式の数値解法の一つであり、解析領域を有限個の粒子の分布で表現する手法である。粒子法は領域のメッシュ分割が不要なため、津波遡上のような大規模に解析領域が変化する問題に広く利用されている。しかし、粒子法の安定性解析や誤差解析のような数学的正当化はこれまであまり研究されてこなかった。そのため、粒子法による数値シミュレーション結果への信頼性などが、他の手法と比較して十分ではなかった。

2. 研究の目的

本研究では、安定性評価や誤差評価のような粒子法に対する数学解析を通して、粒子法の数学的理解の深化と、その解析に基づく粒子法による数値シミュレーションの方法論の確立・改善を図る。

3. 研究の方法

関数解析・偏微分方程式論・離散幾何などの数学理論に基づいて、粒子法の計算手順とその近似に対して数学的な枠組みを構成し、粒子法の計算安定性や誤差評価の定理予想とその証明を行う。さらに、その解析を通して、粒子法の問題点を洗い出し、改善案を提示することで粒子法の改良手法を提案する。改良手法に関しては工学研究者へ提案・共同開発を実施し、実問題への応用を目指す。

4. 研究成果

本研究では関数解析・偏微分方程式論・離散幾何などの数学理論に基づいて、粒子法の近似微分作用素に対する打ち切り誤差評価や熱方程式や Poisson 方程式に対する粒子法の誤差評価を得た。また、非圧縮性流れ (Navier-Stokes 方程式) に対する粒子法の安定性評価も得た。これらの結果をもとに、安定性条件を緩和する改良手法の開発や、その数学的解釈を与えることができた。さらに、工学者と共同で改良手法を鉛直噴流実験や土砂流れ実験などの実問題に適用し、改良手法が従来手法より安定かつ高精度に計算できることを示した。以下に詳細を示す。

初年度は、まず流れ問題に対する粒子法のスキームの再構築を行った。非圧縮性 Navier-Stokes 方程式にある条件下で厳密に収束する制約付き問題に対し、空間離散化に一般化粒子法を用いたスキームを考える。制約付き問題の収束条件と、研究代表者らの成果である誤差評価の知見 [3, 9] を用いて、本スキームの収束性の十分条件を予想し、その正当性を数値実験により示した。この数値実験によって得られた収束条件では、より良い精度を得るためには計算量を指数的に増やさなければならないという問題があったため、次に、高精度な空間近似を用いた粒子法を含む新たな一般化粒子法の枠組みを構築した [4] (図)。この枠組みでは、離散化パラメータおよび最小二乗近似に付加する制約条件の選択によって、S-SPM や LS-MPS などの高精度な粒子法を記述することができる。この一般化粒子法に対して、従来の誤差評価で用いた接続性の条件を用いることで、Poisson 方程式に対する一般化粒子法の安定性を示した [7]。

第二年度は、初年度の数学的結果を拡張し、非圧縮性流れ問題に対する粒子法の一意可解性と安定性を証明した。本研究では、離散化パラメータに対する 3 つの条件 “粒子分布の接続性”、“粒子分布の準正則性”、“時間刻みの制約条件” を導入することで、一意可解性と安定性を示している。また、現在広く利用されている流れ問題に対する粒子法の安定化スキームに対して、エネルギー最小化問題を用いて安定化項の理論的な導出を行った [8]。

第三年度は空間離散化が安定化スキームに対応する非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時間離散方程式を導入し、その誤差評価に基づいて安定化パラメータの最適化を行った。さらに、3 次元の激しい流れを伴う鉛直噴流問題に適用し、最適化された安定化パラメータの有効性を数値的に確認した [2]。

最終年度は、これまでに得た数学的評価をもとに、工学者と共同で実用的な高精度粒子法の開発とその数学的理解を深めた。まず、第二年度に得られた非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する粒子法の安定性条件と従来の経験的な安定化法をもとに、粒子分布を適切に補正する新たな粒子法を提案した [1]。従来の安定化法では流速と粒子分布の補正を同時に行っていたのに対し、

提案手法は、粒子法の数学的な安定性の条件が本質的には粒子分布の正則性に起因していることに着目することで、流速と粒子分布の補正を選択的に補正するように定式化される。これにより、混相流のような場所や状態によって流体の密度が変化するような問題でも安定に数値計算できるようになり、粒子法の適用範囲の拡張に成功した。

また、粒子法（特に MPS 法）における近似微分作用素の包括的な導出も行った。従来の近似微分作用素（特に勾配、発散、ラプラシアン）の導出は各微分階数に応じて異なる導出がなされており、異なる微分階数を含む方程式での近似の整合性が長年議論されてきた。本研究では多変数かつ高階の Taylor 展開と多項式基底を用いることで、従来の近似微分作用素や混合偏微分などの新たな近似微分作用素を同時に導出できる方法を示した。これにより、長年議論されてきた粒子法の整合性の議論を肯定的に解決できただけでなく、非等方的な拡散や変数変換を含むような問題にも粒子法の拡張が可能となった。近似混合偏微分作用素の応用として、任意形状の底面を平面に変換して解析する手法を提案し、検証問題で高い精度が得られていることを確認した。

本研究の成果、特に非圧縮性流れに対する粒子法の安定性評価[4]は、実際に応用されている粒子法のスキームに対して世界で初めて離散解析的に数学的評価を与えた論文であり、粒子法の数学解析において重要な位置付けにあると考えている。実際に、世界一の規模の粒子法の国際コミュニティ SPHRIC において、彼らの HP や総説論文で本論文が紹介されている。また、関連する成果[4,9]に対して日本数学会応用数学奨励賞（2019年）や日本応用数理学会論文賞（2020年）を受賞している。今後は、非圧縮性流れに対する粒子法の誤差評価のような、より詳細な粒子法の数学解析や、より複雑現象に向けた応用を視野にいれている。

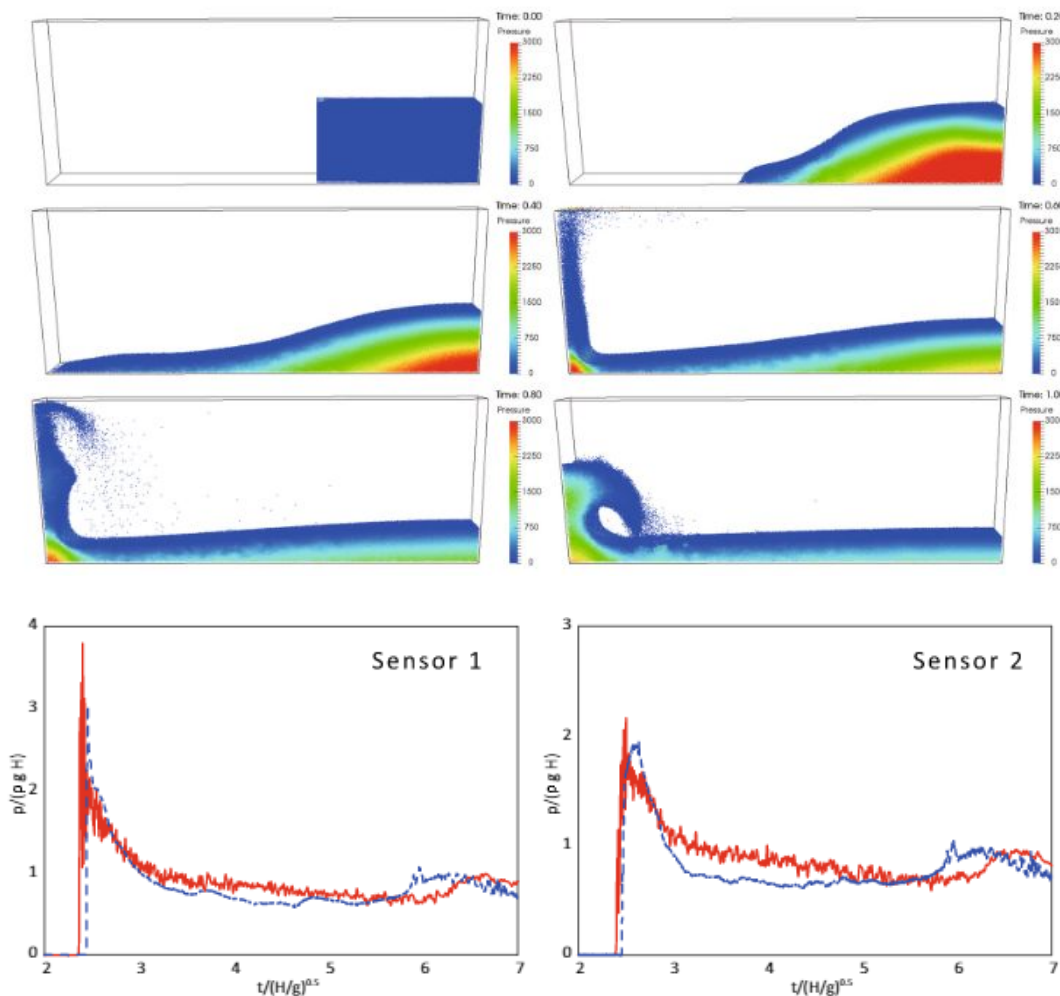


図 一般化粒子法を用いたダムブレイクシミュレーションにおける圧力分布と実験との比較[4]。

参考文献

- [1] 藤井孟大, 浅井光輝, 井元佑介. 物理速度と輸送速度を区別した選択型デュアル流速 ISPH 法を用いた混相流解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), 76 巻 2 号, pp. 247-257, 2021 年 2 月 1 日.
- [2] 井元佑介, 浅井光輝, 藤井孟大. 安定化 ISPH 法の理論的解釈 II - 誤差評価に基づく安定化係数の最適化 - , 土木学会論文集 A2(応用力学), 75 巻 2 号, pp. 187-194, 2020 年 2 月 6 日.
- [3] Y Imoto. Truncation error estimates of approximate operators in a generalized particle method. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 37, pp. 565-598, February 3, 2020.
- [4] Y Imoto, S Tsuzuki, D Nishiura. Convergence study and optimal weight functions of an explicit particle method for the incompressible Navier-Stokes equations, Computational Particle Mechanics, Vol. 6 (4), pp. 671-694, September 18, 2019.
- [5] D Morikawa, M Asai, N Idris, Y Imoto, M Isshiki. Improvements in highly viscous fluid simulation using a fully implicit SPH method. Computational Particle Mechanics, Vol. 6 (4), pp. 529-544, September 18, 2019.
- [6] Y Imoto. Unique solvability and stability analysis for incompressible smoothed particle hydrodynamics method. Computational Particle Mechanics, Vol. 6 (2), pp. 297-309, March 26, 2019.
- [7] Y Imoto. Unique solvability and stability of a generalized particle method for a Poisson equation in discrete Sobolev norms. Applications of Mathematics, Vol. 64 (1), pp. 33-43, February 14, 2019.
- [8] 井元佑介, 浅井光輝. 安定化 ISPH 法の理論的解釈 - エネルギー最小化問題からの安定化項の導出 - , 土木学会論文集 A2(応用力学), 74 巻 2 号, pp. 159-166, 2019 年 1 月 31 日.
- [9] Y Imoto, D Tagami. Truncation error estimates of approximate differential operators of a particle method based on the Voronoi decomposition. JSIAM Letters, Vol. 9, pp. 69-72, October 19, 2017.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yusuke Imoto	4. 巻 37
2. 論文標題 Truncation error estimates of approximate operators in a generalized particle method	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 565-598
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-020-00407-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yusuke Imoto, Satori Tsuzuki, Daisuke Nishiura	4. 巻 6(4)
2. 論文標題 Convergence study and optimal weight functions of an explicit particle method for the incompressible Navier-Stokes equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Computational Particle Mechanics	6. 最初と最後の頁 671-694
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40571-019-00247-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Daniel Morikawa, Mitsuteru Asai, Nur ' Ain Idris, Yusuke Imoto, Masaharu Isshiki	4. 巻 6(4)
2. 論文標題 Improvements in highly viscous fluid simulation using a fully implicit SPH method. Computational Particle Mechanics	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Computational Particle Mechanics	6. 最初と最後の頁 529-544
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40571-019-00231-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 井元佑介, 浅井光輝, 藤井孟大	4. 巻 75
2. 論文標題 安定化ISPH法の理論的解釈II - 誤差評価に基づく安定化係数の最適化 -	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 土木学会論文集A2(応用力学)	6. 最初と最後の頁 I_187 ~ I_194
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2208/jscejam.75.2_I_187	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Imoto Yusuke	4. 巻 6
2. 論文標題 Unique solvability and stability analysis for incompressible smoothed particle hydrodynamics method	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Computational Particle Mechanics	6. 最初と最後の頁 297 ~ 309
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40571-018-0214-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Imoto Yusuke	4. 巻 64
2. 論文標題 Unique solvability and stability analysis of a generalized particle method for a Poisson equation in discrete Sobolev norms	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Applications of Mathematics	6. 最初と最後の頁 33 ~ 43
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21136/AM.2019.0210-18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Imoto Yusuke, Asai Mitsuteru	4. 巻 74
2. 論文標題 A RATIONALE OF THE STABILIZED ISPH METHOD?A DERIVATION OF A STABILIZATION TERM FROM AN ENERGY MINIMIZATION PROBLEM?	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM))	6. 最初と最後の頁 I_159 ~ I_166
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2208/jscejam.74.I_159	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Imoto and D. Tagami	4. 巻 9
2. 論文標題 Truncation error estimates of approximate differential operators of a particle method based on the Voronoi decomposition	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 69-72
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14495/jsiaml.9.69	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 井元佑介, 浅井光輝
2. 発表標題 非圧縮性Navier--Stokes方程式に対する粒子法における安定化項の考察
3. 学会等名 日本応用数理学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 井元佑介, 浅井光輝
2. 発表標題 安定化ISPH法の理論的解釈II - 誤差評価に基づく安定化係数の最適化-
3. 学会等名 第65回理論応用力学講演会・第22回土木学会応用力学シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Daisuke Tagami, Yusuke Imoto
2. 発表標題 Numerical error evaluations of the incompressible Navier--Stokes equations by a time-explicit generalized particle method.
3. 学会等名 13th International SPHERIC SPH Workshop
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Daisuke Tagami, Yusuke Imoto
2. 発表標題 Some investigations of a time-explicit generalized particle method for the incompressible Navier--Stokes equations
3. 学会等名 ECCM--ECFD2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井元佑介
2. 発表標題 非圧縮性Navier--Stokes方程式に対する粒子法の安定性解析
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井元佑介
2. 発表標題 粒子法を用いた非圧縮性流れシミュレーションの安定性解析
3. 学会等名 第8回計算力学シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井元佑介
2. 発表標題 ISPH法の安定性解析
3. 学会等名 日本機械学会 第31回計算力学講演会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井元佑介
2. 発表標題 ポアソン方程式に対するSPH法の改善
3. 学会等名 第23回計算工学講演会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井元佑介, 浅井光輝
2. 発表標題 安定化ISPH法の理論的解釈 --エネルギー最小化問題からの安定化項の導出--
3. 学会等名 第21回応用力学シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Y. Imoto and D. Tagami
2. 発表標題 An error estimate of particle methods for Poisson equation with Neumann boundary conditions
3. 学会等名 International Conference on Mathematical Analysis of Continuum Mechanics (CoMFoS2017) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 N. Mitsume, T. Tomiczek, Y. Imoto, A. S. Donahue, J. J. Westerink, T. Yamada, S. Yoshimura
2. 発表標題 Numerical analysis of tsunami open flume experiment using parallel solver of 2D-3D coupled wave model
3. 学会等名 The 2nd International Conference on Computational Engineering and Science for Safety and Environmental Problems (COMPSAFE 2017) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 井元佑介
2. 発表標題 Poisson方程式に対する粒子法の離散 H^1_0 ノルムによる安定性
3. 学会等名 日本応用数理学会 第14回 研究部会連合発表
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井元佑介
2. 発表標題 粒子法における不等式評価の現状と課題
3. 学会等名 数学と現象in 清里 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井元佑介
2. 発表標題 非圧縮性流れ問題に対する粒子法の数値解析学からのアプローチ
3. 学会等名 北海道大学偏微分方程式セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 井元佑介, 田上大助
2. 発表標題 非圧縮粘性流れ問題に対するある一般化粒子法の数値的収束性
3. 学会等名 第31 回数値流体力学シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 三目直登, Tomiczek Tori, 井元佑介, Westerink Joannes J., 山田知典, 吉村忍
2. 発表標題 2D-3D片方向連成波モデルによる津波再現水槽実験の並列解析
3. 学会等名 第30回 計算力学講演会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 公益社団法人土木学会 応用力学委員会 計算力学小委員会	4. 発行年 2020年
2. 出版社 丸善出版	5. 総ページ数 360
3. 書名 いまさら聞けない計算力学の定石	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------