

令和 2 年 5 月 27 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2017～2019

課題番号：17K18722

研究課題名（和文）非可換 Deligne-Lusztig 理論

研究課題名（英文）Noncommutative Deligne-Lusztig theory

研究代表者

今井 直毅（Imai, Naoki）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：90597775

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,800,000 円

研究成果の概要（和文）：Deligne-Lusztig 理論の類似を考えることにより、数論的に興味のある表現の新しい構成を与えた。より具体的には有限ユニタリ群に対する Weil 表現を幾何的に構成し、その新谷リフトも幾何的に構成した。さらに Frobenius 作用を用いることにより、シンプレクティック群に対する Howe 対応を特別な場合に構成し、その対応の性質を調べた。mod ell Weil 表現や mod ell Howe 対応についても調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数論的に興味深い表現を幾何学的に構成することができた。またその構成を用いて、新谷リフトのような関手性を幾何学的に実現したり、表現に関する性質を幾何的な手法を用いて調べることができた。さらに幾何学的に実現できていることを用いて mod ell 係数における類似の対象を自然に構成し、それらについても幾何的に調べて新しい結果が得られた。modular 表現は数論においても重要な役割を果たすため、今後の応用も期待でき、学術的意義があると考えられる。

研究成果の概要（英文）：By considering an analogue of Deligne-Lusztig theory, we constructed representations which we are interested in from a number theoretic view point. More concretely, we constructed a Weil representation for a finite unitary group and its Shintani lift geometrically. Further, using a Frobenius action, we constructed and studied the Howe correspondence for a symplectic group in a special case. We studied also mod ell Weil representations and mod ell Howe correspondences.

研究分野：数論

キーワード：Deligne-Lusztig 構成

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

Deligne-Lusztig 理論とは、有限体  $\mathbb{F}_q$  上の簡約代数群  $G$  に対して、Deligne-Lusztig 多様体とよばれる  $\mathbb{F}_q$  の代数閉包  $\overline{\mathbb{F}_q}$  上の代数多様体を構成し、その  $\ell$  進エタールコホモロジーを用いて、有限群  $G(\mathbb{F}_q)$  の表現を構成する理論であった。

Deligne-Lusztig 理論は、歴史的には Drinfeld による Langlands 対応の研究において発見された Drinfeld 曲線から着想を得たものであった。

$F$  を剰余体が  $\mathbb{F}_q$  である  $p$  進体とする。

DeBacker-Reeder の研究によると、 $G$  のトーラスの指標  $\chi$  から得られる Galois 群の指標の誘導として Galois 表現が  $\sigma_\chi$  構成され、一方で Deligne-Lusztig 理論によって  $\chi$  から得られる  $G(\mathbb{F}_q)$  の表現から  $G(F)$  の表現  $\pi_\chi$  が構成され、 $\sigma_\chi$  と  $\pi_\chi$  が局所 Langlands 対応によって対応している。このように Deligne-Lusztig 理論は数論的に興味のある表現の構成にも使われている。

### 2. 研究の目的

本研究では、Deligne-Lusztig 理論の類似および一般化を考えることにより、数論的に興味のある表現の新しい構成を与えることを目標とする。

ここでは、指標の誘導でかけない表現を原始的な表現と呼ぶことにする。

一つの目的は、原始的な Galois 表現の構成に使えるような Deligne-Lusztig 理論の類似を追求することである。

また Weil 表現のような数論的に興味深い表現についても、Deligne-Lusztig 理論との関係を調べる。

### 3. 研究の方法

以前の Lubin-Tate 空間のアフィノイドの還元の研究において、還元に見える代数多様体の  $\ell$  進エタールコホモロジーが原始的な局所 Galois 表現をうみだしていることがあった。この例をより詳細に調べることにより、そのような表現をうみだす代数多様体の系統的な構成を模索する。

また、そのような多様体の類似を調べることによって、他の数論的に興味深い表現の構成が得られないか調べる。

### 4. 研究成果

まず、以前の Lubin-Tate 空間のアフィノイドの還元の研究において、還元に見れていた有限体上の代数多様体が、代数群の組に対するある種の Deligne-Lusztig 構成から得られることを見出し、その定式化を与えた。さらにそのような構成から得られる表現の一般論についても考察を進めた。

また、そのような Deligne-Lusztig 構成から得られる代数多様体の具体例を調べ、ある例においては  $\ell$  進エタールコホモロジーが有限ユニタリ群の Weil 表現を与えることが分かった。これにより、有限体の標数に関係なく Weil 表現が統一的に構成できるようになった。この構成を用いて、Howe 対応についても調べ、有限ユニタリ群に対する Howe 対応が unipotency を保つことを示した。

さらに代数多様体の基礎体から得られる Frobenius 作用を用いることによって、シンプレクティック群に対する Howe 対応も特別な場合に幾何学的に実現することができた。この場合にも、unipotency が保たれることを示した。

上記の結果において得られた、有限ユニタリ群の Weil 表現の幾何的構成を用いて、有限ユニタリ群の Weil 表現の新谷リフトを幾何的に構成することができた。これは Henniart-Wang によるシンプレクティック群に対する結果の類似を幾何学的に与えるものである。

また、上記の有限ユニタリ群の Weil 表現の幾何的構成において、 $\ell$  進エタールコホモロジーの代わりに、mod  $\ell$  エタールコホモロジーを考えることによって、有限ユニタリ群に対する mod  $\ell$  Weil 表現を構成することができる。この有限ユニタリ群の mod  $\ell$  Weil 表現がどのように分解するかを決定した。

さらに、Frobenius 作用を用いることによって mod  $\ell$  係数の場合にも、シンプレクティック群に対する Howe 対応を特別な場合に幾何学的に実現することができた。この mod  $\ell$  Howe 対応によって直交群  $O_2$  の既約表現から得られるシンプレクティック群の表現がいつ既約になるかを調べた。結果としては、多くの場合には得られる表現が既約になるが、ある特別な場合には、既約ではないが直既約になることが分かった。これは  $\ell$  進係数の場合には見られない新しい現象であり、実際コホモロジーのレベルでも、今考えている場合に

$\mathbb{Z}_{\ell}$  係数のエタールコホモロジーから mod  $\ell$  係数のエタールコホモロジーへの自然な写像は、全射になっていないことが分かった。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Naoki Imai and Takahiro Tsushima	4. 巻 N/A
2. 論文標題 Affinoids in the Lubin-Tate Perfectoid Space and Simple Supercuspidal Representations I: Tame Case	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 N/A
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1093/imrn/rny229">https://doi.org/10.1093/imrn/rny229</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Imai and Takahiro Tsushima	4. 巻 N/A
2. 論文標題 Geometric realization of the local Langlands correspondence for representations of conductor three	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Publ. Res. Inst. Math. Sci.	6. 最初と最後の頁 N/A
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Imai and Takahiro Tsushima	4. 巻 58
2. 論文標題 Local Jacquet-Langlands correspondences for simple supercuspidal representations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kyoto J. Math.	6. 最初と最後の頁 623-638
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Naoki Imai
2. 発表標題 Convolution morphisms and Kottwitz conjecture
3. 学会等名 Caltech number theory seminar（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Naoki Imai
2. 発表標題 Langlands functoriality in the geometrization of the local Langlands correspondence
3. 学会等名 New Developments in Representation Theory of p-adic Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Imai
2. 発表標題 Convolution morphisms, geometric Satake equivalence and Kottwitz conjecture
3. 学会等名 The conference on the Legacy of Elie Cartan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Imai
2. 発表標題 Deligne-Lusztig stack
3. 学会等名 International Conference on Arithmetic Geometry, In honor of Michael Rapoport's 71st birthday (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Imai
2. 発表標題 Geometric realization of Heisenberg-Weil representations for finite unitary groups
3. 学会等名 Tokyo-Lyon Satellite Conference in Number Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----