

令和 2 年 6 月 2 日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的研究(萌芽)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K18727

研究課題名(和文) 完全圏と三角圏におけるホモロジー代数の理論的発展

研究課題名(英文) Theoretical development of homological algebra in exact categories and triangulated categories

研究代表者

中岡 宏行 (Nakaoka, Hiroyuki)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：90568677

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：Yann Palu氏とのextriangulated category(以下、ET圏)を定義した共同研究は改定後論文誌に掲載された。Yu Liu氏とのET圏の余ねじれ対のハート構成を調べた共同研究は改定後論文誌に掲載された。

Martin Herschend氏・Yu Liu氏との共同研究で高次数版としてn-exangulated categoryという概念を定義した。現在査読待ち。Osamu Iyama氏・Yann Palu氏との共同研究ではAuslander-Reiten理論をET圏で考察するプレプリントを作成した。

他に、gentle多元環の導来不変量に関する単著のプレプリントを作成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ホモロジー代数の舞台として重要な完全圏・三角圏のクラスは定義としては互いにほぼ排他的であり、両方で定義される類似の概念が同じような性質を持つ場合であっても、別々に取り扱い、しばしば同じような議論を二度行う必要が生じていた。

本研究では、これらの二つの圏のクラスをExt1-関手の言葉で同時に扱う概念としてYann Paluと共に導入したextriangulated categoryを用いて、統一的なホモロジー代数の理論整備を目指している。相対ホモロジー代数、Auslander-Reiten理論といった完全圏・三角圏で知られる事柄を実際に統一的に扱うことができた。また、高次数版の定義も考察した。

研究成果の概要(英文)：The collaboration with Yann Palu, in which we have introduced the notion of an extriangulated category, was published after revision. In the sequel, a collaboration with Yu Liu on the heart of cotorsion pairs on extriangulated categories was published after revision. In collaboration with Martin Herschend and Yu Liu, we have introduced the notion of an n-exangulated category as a higher version of extriangulated category. This manuscript was submitted to a journal, now under review. In collaboration with Osamu Iyama and Yann Palu, we wrote a preprint on the Auslander-Reiten theory in extriangulated categories. In addition, I have submitted a preprint concerning derived invariants of gentle algebras to arXiv.

研究分野：代数学における圏論

キーワード：完全圏 三角圏 n-角圏 n-完全圏

1. 研究開始当初の背景

ホモロジー代数は、位相幾何学・代数幾何学・群論・表現論といった代数や幾何の様々な場面で現れる種々のコホモロジー・導来関手を扱うための一般抽象論である。すなわち、数学の広範な分野における多種多様ではあるが「似ている」議論を、複体・完全性・核や余核といった概念を用い、実際に統一的に扱うことを目的とする。これを可能にする数学的枠組みは圏論により提供される。

ホモロジー代数の最も重要な舞台はアーベル圏および三角圏である。アーベル圏は Grothendieck により層のコホモロジーや、Tor 関手・Ext 関手といった導来関手を共通に扱うための道具として導入され、今や代数学では欠くことのできない基本的な概念である。さらに Quillen により、短完全列の性質を抽出した完全圏に一般化されている。三角圏は Verdier により導入され、表現論や代数幾何学で重要となる導来圏や、フロベニウス圏から得られる安定圏、また近年ではクラスター圏などの形でも用いられている。

ホモロジー代数の舞台としていずれも重要なこれらのクラスが定義としては互いにほぼ排他的であり、三角圏かつ完全圏となる圏はほぼ自明(半単純な圏)となることに注意する。そのため、完全圏および三角圏上で定義される類似の概念が同じような性質を持つ場合であっても、両者を別々に取り扱い、しばしば同じような議論を二度行う必要が生じている。

2. 研究の目的

本研究は、代数分野に現れるホモロジカルな圏論として、ホモロジー代数の重要な舞台である完全圏・三角圏とその周辺の一般論を発展させることを目的としている。中心的課題としては、完全圏と三角圏を統一する圏のクラスでのホモロジー代数理論の展開を挙げている。

Yann Palu と共に、完全圏と三角圏というホモロジー代数で最も重要なこれらの二つの圏のクラスを Ext1-関手の言葉で同時に扱う概念である extriangulated category を導入した。Ext1-関手を用いて完全圏と三角圏が同時に一般化されるという事実は、一度発見されればとても自然であり、これまでに完全圏・アーベル圏と三角圏に対して共通に知られていることは、extriangulated category を用いて統一的に扱える可能性が高い。

特に、完全圏・三角圏で知られている Auslander-Reiten 理論や相対ホモロジー代数を extriangulated category において考察することが目標の一つであった。また、環の表現論において近年現れた三角圏の高次数化としての $n(+2)$ -角圏、ならびに完全圏・アーベル圏の高次数化としての n -完全圏・ n -アーベル圏を統一的に扱う枠組みを与えることも目標に挙げている。

3. 研究の方法

手法としては、Yann Palu 氏と導入した extriangulated category の概念を発展させることを主としている。また研究期間中に、extriangulated category の高次数版として Martin Herschend 氏・Yu Liu 氏との共同研究で、 n -完全圏と $n+2$ -角圏を統一する圏のクラスとして n -exangulated category の定義を得た。これにより関連する現象を一般の n で考察する基盤ができ、構成が可能なものについては、一般の n での可能性が視野に入った。一方で、 n -完全圏や n -角圏での現象は少なくとも完全圏や三角圏と比べるとまだまだ未知の部分が多いこと、また、extriangulated category に比べて高次数化である n -exangulated category の定義も複雑になっていることを鑑みると、まずは $n=1$ の場合に extriangulated category を用いて関連する現象の詳細な記述を検討することが肝要であると考えられる。

4. 研究成果

Extrirangulated category の定義を行い、一連の研究の発端となった Yann Palu 氏との共同研究 "Mutation via Hovey twin cotorsion pairs and model structures in extriangulated categories" は改定後、出版時のレフェリーの提案によりタイトルを "Extrirangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures" に変更ののち、論文誌に掲載された。

続いて extriangulated category 上の余ねじれ対のハート構成について調べた Yu Liu 氏との共同研究 "Hearts of twin cotorsion pairs on extriangulated categories" は改定ののち、論文誌に掲載された。

Martin Herschend 氏・Yu Liu 氏との共同研究では n -完全圏と $n+2$ -角圏を統一する圏のクラス

として n -exangulated category という概念を定義し、その基本的な性質を調べた。Extriangulated category は完全圏における短完全列や三角圏における完全三角形といった従来のものに代わり Ext^1 関手に相当する構造を本体に据えて定義されていたが、高次数化である n -exangulated category も同様に n 次の Ext -関手にあたる構造を用いて定義した。この結果はプレプリントサーバー arXiv に投稿し、改訂ののち論文誌に投稿した。現在査読待ち。また、このプレプリントに於いて n -exangulated category における relative theory を考察し、 n -exangulated category のクラスが relative theory で閉じていることも示した。これにより、目標の一つに掲げていた extriangulated category における相対ホモロジー代数については、一般の n で考察できたことになる。

Osamu Iyama 氏・Yann Palu 氏との共同研究では、完全圏・三角圏で知られている Auslander-Reiten 理論を extriangulated category において考察するプレプリントを作成し、プレプリントサーバー arXiv に掲載ののち、論文誌に投稿した。

上記のプレプリントに於いて、gentle algebra の導来圏を例として扱ったが、これに関連して gentle algebra の導来不変量である Avella-Alaminos-Geiss 不変量について調べ、導来同値との関係を単著のプレプリントに纏めた。これも arXiv に掲載ののち、論文誌に投稿した。現在査読待ち。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Hiroyuki Nakaoka, Yann Palu	4. 巻 60
2. 論文標題 Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle Categoriques	6. 最初と最後の頁 117-193
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Yu Liu, Hiroyuki Nakaoka	4. 巻 528
2. 論文標題 Hearts of twin cotorsion pairs on extriangulated categories	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 96-149
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.03.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 Hiroyuki Nakaoka
2. 発表標題 On a unification of n-exact categories and n+2-angulated categories
3. 学会等名 Higher homological algebra and cluster tilting (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyuki Nakaoka
2. 発表標題 On a unification of n-exact categories and n+2-angulated categories
3. 学会等名 International Conference on Representations of Algebras
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyuki Nakaoka
2. 発表標題 Finite gentle repetitions of gentle algebras and their Avella-Alaminos-Geiss invariants
3. 学会等名 Oberseminar Algebra
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyuki Nakaoka
2. 発表標題 Some remarks on Avella-Alaminos-Geiss invariants of gentle algebras
3. 学会等名 第51回環論および表現論シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyuki Nakaoka
2. 発表標題 On a unification of exact categories and triangulated categories
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyuki Nakaoka
2. 発表標題 Mutation via Hovey twin cotorsion pairs and model structures in extriangulated categories
3. 学会等名 Algebraic Geometry in Positive Characteristic and Related Topics(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyuki Nakaoka
2. 発表標題 Finite gentle repetitions of gentle algebras and their Avella-Alaminos-Geiss invariants
3. 学会等名 Seminaire de Theorie des Groupes
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroyuki Nakaoka
2. 発表標題 Finite gentle repetitions of gentle algebras and their Avella-Alaminos-Geiss invariants
3. 学会等名 Seminaire d'Algebre
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroyuki Nakaoka
2. 発表標題 On a unification of exact categories and triangulated categories
3. 学会等名 Oberseminar Algebra
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----