様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　６ 月 １３ 日現在

機関番号：１２１０１
研究種目：挑戦的研究（萌芽）
研究期間：2017～2021
課題番号：１７Ｋ１８７３１

研究課題名（和文）多変数フーリエ級数の収束問題とガウスの円問題

研究課題名（英文）Convergence problem of multiple Fourier series and Gauss circle problem

研究代表者

中井　英一（Nakai, Eiichi）

茨城大学・理工学研究科（理学野）・教授

研究者番号：６０２５９９００

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,800,000円

研究成果の概要（和文）：フーリエ級数の収束問題について、1変数の関数の場合には1960年代までの研究によりほぼ解決しているが、多変数関数の場合にはまだ分からないことが多い。近年では、Gibbs現象に加え、Pinsky現象、倉坪現象が発見され、多変数フーリエ級数の複雑さがより明らかになった。
　一方、ガウスの円問題は、円の面積とその円内の格子点の個数との誤差を評価する問題である。Gaussは、誤差のオーダーは円の面積の1/2乗以下であることを証明した。1915年、Hardyは、1/4乗に限りなく近いと予想した。しかし、現在でも未解決である。
　本研究では、この一見無関係と思われる2つの未解決問題の同値性を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
　フーリエが熱伝導方程式を解いてから約200 年になる。ただし、フーリエの方法には不完全な部分があり、当時から問題点が指摘されていた。その問題点の中心的なもののひとつがフーリエ級数の収束問題である。一方、ガウスの円問題に関するHardy予想は100年来の未解決問題である。
　本研究では、これら調和解析学の古典的問題と解析的整数論の難問という、一見無関係と思われる2つの未解決問題の密接な相互関係を明らかにした。このことは、単に大問題の解決に寄与するだけではなく、2つの分野相互に新しい研究手法をもたらす。

研究成果の概要（英文）：The convergence problem of Fourier series has been largely solved by research up to the 1960s in the case of single-variable functions, but in the case of multivariable functions, there are still many things that are not yet understood. In recent years, in addition to the Gibbs phenomenon, the Pinsky phenomenon and the Kuratsubo phenomenon have been discovered, and the complexity of the multivariable Fourier series has become more apparent.
On the other hand, the Gauss circle problem is a problem to evaluate the error between the area of a circle and the number of lattice points in the circle. Gauss proved that the order of error is less than or equal to the power of 1/2 of the area of the circle. In 1915, Hardy conjectured that it would be as close as possible to the power of 1/4, but it remains unresolved today.
In this study, we have proven the equivalence of these two seemingly unrelated unresolved problems.

研究分野：基礎解析学

キーワード：フーリエ級数　調和解析学　解析的整数論

１．研究開始当初の背景

フーリエ級数の収束問題について、1 変数の関数の場合には、局所性定理、Dirichlet-Jordan の収束定理、Carleson-Hunt の概収束定理など、1960 年代までの研究によりほぼ解決している。これに対して、多変数関数の場合には、局所性定理が成り立たないなど難しい点もあり、まだ分からないことが多い。そうした中で、とりわけ大きな成果は 1993 年の Pinsky たちによる結果である。彼らは、フーリエ級数の球形部分和の研究において、3 次元以上のとき、原点を中心とする球の定義関数のフーリエ級数が原点で発散することを示した。もとの関数は原点の近傍では滑らかな定数関数であるが、それにもかかわらず発散するのである。さらに、近年、もっと衝撃的なことが倉坪（研究分担者）により証明された。5 次元以上の球の定義関数のフーリエ級数が、すべての有理点で発散するというものである。有理点とは、各座標成分がすべて有理数である点である。これら Pinsky 現象や倉坪現象の発見は、多変数フーリエ級数の複雑さをより明らかにする結果となった。

一方、ガウスの円問題 (Gauss circle problem) は、円の面積とその円内の格子点の個数との誤差を評価する問題である。格子点とは x 座標と y 座標がともに整数である点であり、その個数は単位正方形（面積 1）の個数に一致する（図 1 参照)。したがって、円の面積とその円内の格子点の個数はほぼ等しく、その誤差は円の面積が大きくなれば相対的に小さくなる。Gauss (1777–1855) は、円の面積 S に対して誤差のオーダーは $S^{1/2}$ 以下であることを証明した。これは面積と円周との比である。その後 Sierpinski は 1906 年、誤差のオーダーは $S^{1/3}$ 以下であることを証明し、Hardy は 1915 年、$S^{1/4}$ 以下ではないことを証明した。Hardy はさらに、誤差のオーダーが $S^{1/4}$ に限りなく近いと予想した。これが Hardy 予想である。その後 100 年、多くの数学者が研究を積み重ねているが、現在の最新の結果 (Huxley, 2003) でも、まだ $S^{131/416}$ $(131/416 \approx 0.315)$ 程度である。

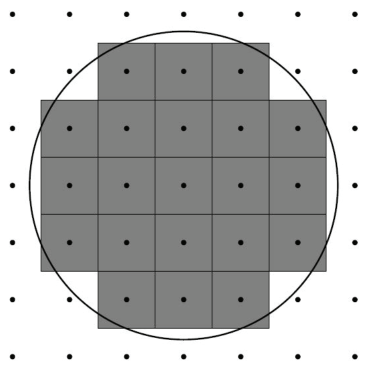

図１　ガウスの円問題

2010 年、倉坪は格子点問題に関する Novák の結果を改良し、その結果を用いて 5 次元以上での倉坪現象を証明した。この倉坪の研究から、格子点問題と多変数フーリエ級数の収束問題に密接な関係があることが分ってきた。しかし、格子点問題は高次元では多くの結果が得られているにもかかわらず、ガウスの円問題のように低次元では未解決である。

２．研究の目的

以上の状況を踏まえて、研究代表者と研究分担者の倉坪は、最近の研究をもとに、4 次元以下での倉坪現象とガウスの円問題との同値性を予想した。すなわち、いずれかが解決できればもう一方も解決できる。この研究の目的は、調和解析学の古典的問題と解析的整数論の難問という、一見無関係と思われる 2 つの未解決問題の密接な相互関係を明らかにしようとするものである。

３．研究の方法

多変数フーリエ級数の収束問題について、これまでの研究はフーリエ級数をそのまま解析的に評価する方法を用いていた。しかし、我々の近年の研究により、フーリエ級数とフーリエ積分の収束の違いが、倉坪現象に関係していることが分かってきた。本研究では、フーリエ級数とフーリエ積分の誤差をさらに分解して、フーリエ級数を Gibbs 現象、Pinsky 現象、倉坪現象の 3 つに分解する手法を用いる。この方法は、Kuratsubo, Nakai and Ootsubo (J. Funct. Anal. 259 (2010), 315–342) の中で球の定義関数に対して用いた方法であり、具体的には「Hardy の等式」を拡張した「或る等式」を出発点とし、等式をつないで丁寧に式変形を積み重ねることにより、フーリエ級数とフーリエ積分の誤差を分解して、格子点問題に結びつけるというものである（論文の中で式変形が十数ページを占める)。この方法により、3 つの現象をそれぞれ区別して詳しく解析できるようになる。

本研究では、より一般の関数に対してこの方法を用いる計画である。我々は、先人の結果を改良して倉坪現象の解析を行うと同時に、フーリエ級数とフーリエ積分の誤差の評価と格子点問題の同値性を証明していく。見通しを立てるために、研究分担者の藤間が中心となり、スーパーコンピュータを用いた数値実験も行った。

４．研究成果

(1) 一般の球対称（radial symmetric）な関数の分解

3 つの特異現象である Gibbs 現象、Pinsky 現象、倉坪現象を解析するため、まず、一般の球対称（radial symmetric）な関数について、フーリエ級数とフーリエ積分の誤差を格子点問題に結びつけるための等式を得た。これは、等式をつないで丁寧に式変形を積み重ねることにより、達成された。

以下では、d 次元における次の形の関数について、そのフーリエ級数の球形部分和の収束発散を詳細に分析した結果を述べる。

$$u_{\beta,a}(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} U_{\beta,a}(x+m), \quad x \in \mathbb{T}^d. \tag{1.1}$$

ここで

$$U_{\beta,a}(x) = \begin{cases} (a^2-|x|^2)^\beta, & |x|<a \\ 0, & |x|\ge a, \end{cases} \quad x\in\mathbb{R}^d,\ a>0,\ \beta>-1. \tag{1.2}$$

この結果から、ガウスの円問題を含む格子点問題の未解決部分とフーリエ級数の収束問題の未解決部分の関係が浮き彫りになった。

なお、多変数フーリエ級数の収束発散を調べるためには、フーリエ級数とフーリエ積分の誤差の評価とともに、フーリエ積分の解析も必要となる。このため、本研究ではフーリエ積分の収束発散についても研究を行い、詳細な結果を得た。

(2) Pinsky 現象と原点における多変数フーリエ級数の収束発散

Pinsky 現象は、元の関数が原点においてなめらかであるにもかかわらず、そのフーリエ級数が原点において発散する現象である。本研究の成果として、すべての次元において、(1.1) のフーリエ級数の収束発散と β の関係を明らかにした。すなわち、$\beta > (d-3)/2$ のときフーリエ級数は原点において収束し、$-1 < \beta \le (d-3)/2$ のときフーリエ級数は原点において発散し Pinsky 現象が発生する。この成果により、Taylor が $\beta = -1/2$ の場合に数値計算実験で得ていた 2 次元における Pinsky 現象の予想を証明するとともに、より正確な β の値の範囲を求めることができた（図 2 参照）。

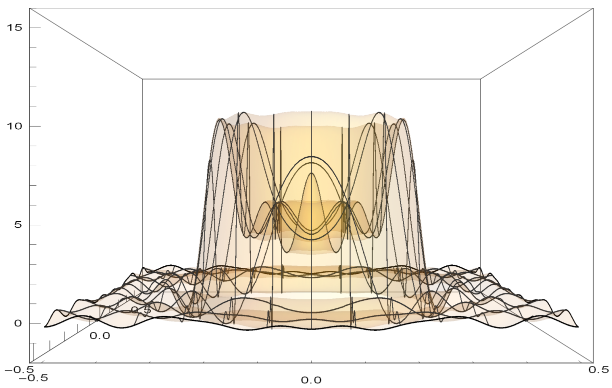

図 2　2 次元における Pinsky 現象

(3) 倉坪現象と各点における多変数フーリエ級数の収束発散

倉坪現象は、フーリエ級数とフーリエ積分との誤差により発生する現象で、格子点問題と密接な関係がある。この現象は、フーリエ級数で発生するがフーリエ積分では発生しない。フーリエ級数の収束問題を解決するために、格子点問題の結果をできる限り改良して利用した。しかし、格子点問題は低次元で未解決な部分があり、このため、フーリエ級数の収束問題についても未解決な部分が残った。このことによって、格子点問題とフーリエ級数の収束問題との関係性がより明らかになった。具体的には

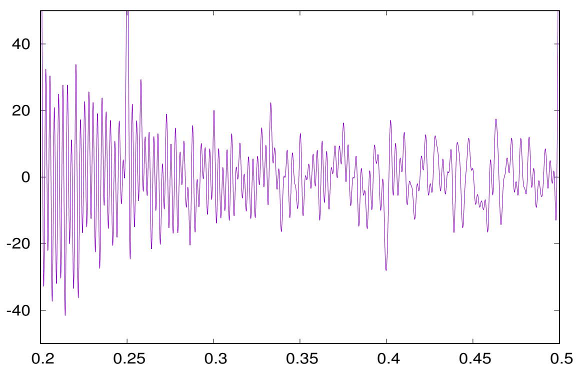

図 3　4 次元における倉坪現象

$$c(1)=-1,\ c(2)=-5/6,\ c(3)=-1/2,\ c(4)=-1/10.$$

とおくと、$1 \le d \le 4$ のとき $\beta > c(d)$ ならば原点と不連続な点を除いて、フーリエ級数は収束することが得られた。$d \ge 5$ のときには、有理点とそれ以外の点について、それぞれフーリエ級数の収束発散のオーダーを決定できた。特に、$d \ge 5$ かつ $(d-5)/2 - \beta \ge 0$ のとき倉坪現象が発生し、フーリエ級数は有理点で発散することを証明した。

なお、$2 \le d \le 4$ かつ $-1 < \beta \le c(d)$ のとき、フーリエ級数の収束発散は未解決であり、この部分が格子点問題の未解決部分と直接関係していることが分かった。ただし、$d = 4$ の場合には、$-1 < \beta \le -1/2$ のときに倉坪現象が発生することを証明することができた（図 3 参照)。

(4) Gibbs 現象（Gibbs-Wilbraham 現象）と不連続点近傍における多変数フーリエ級数の収束発散

Gibbs 現象は、不連続点の近くで不連続の幅以上にフーリエ級数が振動する現象である。不連続点においても、有理点における倉坪現象が関係しており、$1 \le d \le 4$ かつ $c(d) < \beta \le 0$ の場合に Gibbs 現象を決定した。$\beta > 0$ の場合は、不連続点がないため Gibbs 現象は発生しない。

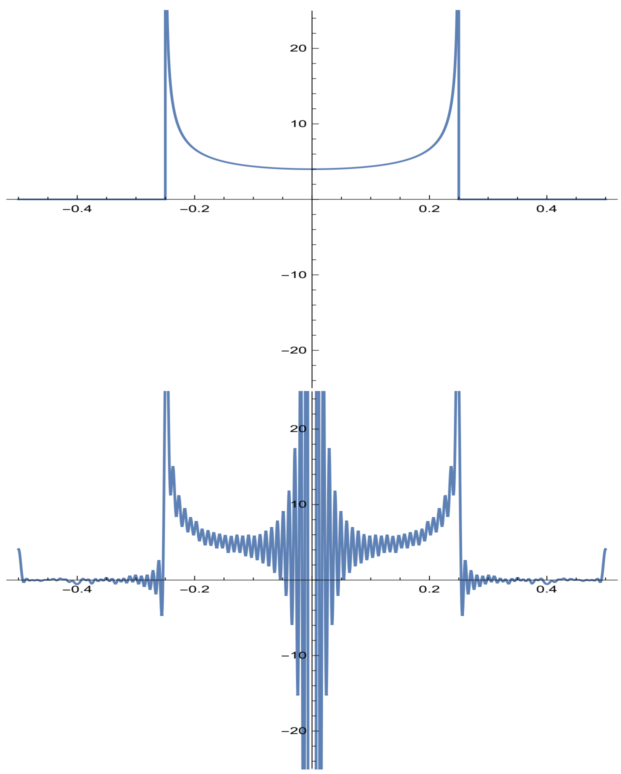

図 4　$u_{\beta,a}(x,0,0,0,0)$ $(d=5,\ \beta=-1/2,\ a=1/4)$ とそのフーリエ級数：3 つの現象が見られる

(5) 多変数フーリエ級数の概収束

多変数フーリエ級数の球形部分和については、概収束についても未解決である。本研究では、$d \ge 4$ かつ $\beta > -1/2$ の場合について、フーリエ級数が概収束することを証明した。この証明では、フーリエ級数とフーリエ積分との誤差と、格子点問題に関するほとんどいたるところでの評価を組み合わせることにより結果を得た。この場合も、$d \ge 4$ かつ $-1 < \beta \le -1/2$ の場合については、フーリエ級数の概収束は未解決である。

倉坪現象は有理点で発散する現象であるが、有理点のルベーグ測度は 0 である。以上の結果から、$d \ge 5$ かつ $(d-5)/2 \ge \beta > -1/2$ のときには、フーリエ級数はほとんどいたるところで収束するが、可算無限個の点で発散することがはっきりした。

なお、図 4 は $d = 5,\ \beta = -1/2$ の場合である。このグラフには Gibbs 現象、Pinsky 現象、倉坪現象がすべて見られる。

(6) ガウスの円問題と多変数フーリエ級数の収束問題

フーリエ級数とフーリエ積分との誤差の評価と格子点問題との関係について、次の結論を得た。$d \ge 4$ のとき、格子点問題のオーダーが $(d-1)/4 + \epsilon$ $(\epsilon > 0)$ であれば、フーリエ級数とフーリエ積分との誤差は 0 に収束する。さらに、$d = 2$ または $d = 3$ のときには、次の決定的な結論を得た。すなわち、$d = 2$ または $d = 3$ のとき、格子点問題のオーダーが $(d-1)/4 + \epsilon$ $(\epsilon > 0)$ であれば、フーリエ級数とフーリエ積分との誤差は 0 に収束し、また、その逆も成り立つ。特に、$d = 2$ のとき、原点を中心とする場合はガウスの円問題であり、そのオーダーは $1/4 + \epsilon$ である。これは、100 年前に Hardy が予想したガウスの円問題のオーダーと一致する。フーリエ積分については詳細な結果を得ているため、ここにおいて、多変数フーリエ級数の収束問題とガウスの円問題の同値性が証明された。

なお、スーパーコンピュータの数値実験では、Hardy の予想が正しいことが強く示唆される結果となっている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 Kazuya Ootsubo、Shoichi Fujima、Shigehiko Kuratsubo and Eiichi Nakai	４．巻 84
２．論文標題 Kuratsubo phenomenon of the Fourier series of some radial functions in four dimensions	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Scientiae Mathematicae Japonicae	６．最初と最後の頁 181～192
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.32219/isms.84.3_181	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Kuratsubo Shigehiko、Nakai Eiichi	４．巻 282
２．論文標題 Multiple Fourier series and lattice point problems	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Journal of Functional Analysis	６．最初と最後の頁 109272：1～62
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2021.109272	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　1件／うち国際学会　3件）

１．発表者名 Eiichi Nakai
２．発表標題 Multiple Fourier series and lattice point problems
３．学会等名 The 7th East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Eiichi Nakai
２．発表標題 A relation of multiple Fourier series and Gauss's circle problems
３．学会等名 International Conference on Function Spaces and Geometric Analysis and Their Applications（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 倉坪茂彦，中井英一
２．発表標題 多変数フーリエ級数とガウスの円問題
３．学会等名 日本数学会年会
４．発表年 2019年

１．発表者名 Kazuya Ootsubo
２．発表標題 On Kuratsubo phenomenon
３．学会等名 Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo 2017（国際学会）
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

研究業績一覧 List of Publications
http://enakai.sci.ibaraki.ac.jp/publication.html
研究業績一覧 講演リスト List of Talks
http://enakai.sci.ibaraki.ac.jp/publication-talks.html

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	倉坪　茂彦 (Kuratsubo Shigehiko) (50003512)	弘前大学・理工学研究科・研究員 (11101)	

6．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	藤間　昌一 (Fujima Shoichi) (00209082)	茨城大学・理工学研究科（理学野）・教授 (12101)	

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	大坪　和弥 (Ootsubo Kazuya)		

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
インドネシア	Bandung Institute of Technology	Jenderal Soedirman University		