様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　５ 月 ２２ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：挑戦的研究（萌芽）
研究期間：2017～2020
課題番号：１７Ｋ１８７３６

研究課題名（和文）確率微分方程式における構造保存数値解法の構成

研究課題名（英文）Structure-preserving methods for stochastic differential equations

研究代表者
降籏　大介（Furihata, Daisuke）

大阪大学・サイバーメディアセンター・教授

研究者番号：８０２４２０１４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,700,000円

研究成果の概要（和文）：Stratonovich 積分ではなく伊藤積分に立脚した場合にのみ線形確率微分方程式に特有の数学構造が表出することに着目し確率微分方程式の発展作用素に対応する離散的な平方作用素を導入することで二次形式構造を保存する新しい方法論を考案し、これによって構造保存数値解法を構成した.
さらに構造保存型の微分幾何の離散化法を提案することで対象領域空間を多次元にすることを可能とするとともに，微分作用素の離散化として非線形差分を新たに提案することで波動型問題について進行波の進行速度方向計算が不要な状況で数値安定な近似解を得られることを示した.

研究成果の学術的意義や社会的意義
確率微分方程式は数学理論上の問題のみならず，気象分野，金融問題や伝染病感染予測等で現れる社会的にも重要な数学的ツールである．その基本たる伊藤積分と時間対称型のStratonovich積分との間に本質的な違いは無いものと認識されているが伊藤積分にのみ表出する数学構造がある．この事実を利用し，発展作用素に対応する離散的な平方作用素を導入して二次形式構造を保存する方法論を考案，構造保存数値解法を構成することで確率微分方程式の近似数値解計算の向上に本質的に寄与する成果を得た.

研究成果の概要（英文）：Focusing on the particular structure of the linear stochastic differential equation, which appears when based on the Ito integral, not the Stratonovich integral, we have developed a new method to conserve the quadratic structure by introducing the discrete square operator corresponding to the development operator of the stochastic differential equation. Via this method, we can construct new structure-preserving numerical methods.
Furthermore, by proposing a discretization of differential geometry appropriate for the structure-preserving methods, it is possible to make the target region space multidimensional. We also proposed new nonlinear difference operators as the discretization of differential operators, and we show that we can obtain numerically stable solutions without the calculation of the travelling-wave direction for wave-type equations.

研究分野：数値解析学

キーワード：確率微分方程式　構造保存数値解法　離散微分幾何　非線形差分

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究者はこれまで主に決定論的な常微分方程式・偏微分方程式に対するその変分構造に基いた構造保存数値解法について研究を行い、多くの研究者と協働し連携をはかってきた.

その一端として 2015 年に日本学術振興会の外国人特別研究員としてスウェーデン Chalmers University of Technology より Fredrik Lindgren 氏を １年間受けいれ、その指導および共同研究にあたった. F. Lindgren 氏は確率微分方程式の専門家であり、お互いの知見を合わせ、協働することで確率微分方程式と構造保存数値解法の接点を数学的に探ることがわれわれの目的であった.

その結果本研究者は、確率微分方程式のもつ伊藤積分に立脚した場合にのみ現れる数学的な構造に着目し、特殊な性質を持つ作用素を定義することでこれを保存するような構造保存解法が構成可能となることを見出した. この結果はいわば端緒であるため、これからさらなる研究によってより多くの結果を得ることが出来、確率微分方程式のまったく新しい、画期的な構造保存数値解法を一般に構成できるに違いないと着想した.

そして実際, 本研究者は保存系・散逸系の偏微分方程式に対する構造保存数値解法として離散変分導関数法[1]を開発・提案し、これまで 20 年間にわたり研究を行っている. 本方法は変分構造に着目することなどから数学的に拡張しやすく、本研究課題への拡張基盤として大変適していることも、本研究者の本問題研究遂行への適性を示していた.

また、この研究過程において内外に多くの構造保存数値解法の専門家との交流を持ち連携・協働をはかってきたこともあり、国際的にも構造保存数値解法の研究については一切の不安はないものであった.

また、本研究者の専門分野ではない確率微分方程式については、スウェーデンの Larsson 教授および同教授研究室の F. Lindgren 氏らと既に共同研究を行っており、連携・協働することで、研究遂行が強く見込まれた.

引用文献(研究開始当初)
[1] D. Furihata, and T. Matsuo, "Discrete Variational Derivative Method: A Structure-Preserving Numerical Method for Partial Differential Equations", Chapman and Hall/CRC press, 2010 (著書).

２．研究の目的

本研究は、確率微分方程式のもつ特有の数学的構造を保つ、これまでにない新しい構造保存数値解法の構成、開発、そしてその基盤理論の構築を研究するものである.

1960 年代から今まで、方程式の数学的構造を失わない構造保存数値解法 (Structure-PreservingMethod, Geometric-Integration method) の研究は内外で広く行われ、数値相対論、天体軌道超長期計算, 相分離現象を含む複雑な冶金問題、高分子挙動計算など、広い分野で大きく貢献してきていることからその有用性は明らかである. しかし、その対象は決定的な常微分方程式・偏微分方程式のもつその数学的構造に限定されてきた. この原因としては、有界性をもたない確率過程の数学的な取扱いがそもそも困難であることや、なによりも、解の十分な滑らかさなど通常の微分方程式の関数解析論では前提とする様々な性質の多くが確率微分方程式の場合は成立しないこと、などから、これまでの方法論の多くが適用不可能であることが挙げられる.

これに対し Stratonovich 積分ではなく伊藤積分に立脚した場合にのみ線形確率微分方程式に特有の数学構造が表出することに着目し、近年、応募者は確率微分方程式の発展作用素に対応する離散的な平方作用素を導入することで二次形式構造を保存する新しい方法論を考案し、これによって構造保存数値解法を構成することが可能なことを示した.

本研究はこの新しい方法に着目し、さらに発展させることで拡張・一般化し、広範囲な確率微分方程式に対する構造保存数値解法の構成を可能とし、さらにそれらの数学的解析を行うためのものである.

また、こうして確率微分方程式に構造保存数値解法が適用可能となれば数値解の数学的な性

質が格段に向上できるが、本研究では確率過程変換を用いた高速数値解析との融合もさらなる目的とする．これにより、高速かつ良質な数値解を得ることが可能になると期待できる．

そしてまた、確率微分方程式が金融分野、気象分野、伝染病感染予測などの社会・医療分野をはじめとする、あらゆる学術分野に現れることも忘れてはならない．この研究の結果・知見によって、こうした確率微分方程式が現れるすべての分野での数値解析の速度、精度、そしてなによりもその質を向上させ広く社会に貢献することがも本研究の目的である．

３．研究の方法

本研究者がこれまでに得た構造保存数値解法に関する研究結果とその過程での連携実績をもとに、以下のような段階を踏んで、それぞれの段階の研究テーマに対して、各分野の専門家と協働してアプローチを考えた．

まず、もっとも数学的に素直な状況から研究を開始する．具体的には、線形単独な確率微分方程式に対する、伊藤積分に立脚する数学構造を対象として構造保存数値解法を構成した．この問題は一見単純だが、金融分野や社会医療問題など多くの場面での実際の応用があり、重要性は高い．この問題に対しては、上記に示した、本研究者が近年得た新しい方法論に基づいて研究を推進した．

また，目的の項でも述べたように、確率微分方程式の解の数学的性質を利用した確率過程変換に基づく高速数値解法と構造保存解法の融合をおこなう．これにより、数値解析が大変に高速化できるだけでなく、さらにその数学的性質が保たれる理想的な解法を構成することを目指した．確率過程変換については、本研究者と共同研究を行っているスウェーデンの Larsson 教授が率いる研究室に多くの専門家がおり、そうした専門家と協働することで本テーマを推進した．この協働においては、先方と連絡を保ち研究推進を行った．

また，上記のステップで構成した新しい構造保存数値解法、特にその数値解がもつと期待される数学的な性質の解析を推進した．一般に構造保存数値解法においては、関数解析論に基づくこうした数学的な解析過程によって、数値解の存在性や絶対有界性など、大変優れた性質が証明できることが多々あるため、これは理論の面からも応用の面からも大変に重要な研究プロセスである．この解析過程においては、これまでの構造保存数値解法の知見も重要であるが、さらに確率微分方程式における解の確率分布論における専門家や、関数解析の専門家との協働が大変重要であるため、こうした分野の専門家であり、これまでの研究において連携してきた F. Lindgren 氏や大分大学の吉川教授等の協働による研究を推進した．

そして，これまでの結果に加えて、研究対象を、扱いがより困難な非線形な確率微分方程式に変え、構造保存数値解法の構成を行い、さらに確率過程変換に基づく高速数値解法との融合、および数学的な性質の解析を試みた．対象の確率微分方程式が非線形になることで、一般に数値解法の構成ならびに解析が格段に困難になるが、非線形差分の考案により波動型偏微分方程式など一部の問題において想定していない形で解決をみるに至った．

４．研究成果

目的と計画に従い，上記のような方法を通じて確率微分方程式の数値解法におけるその性能の向上の可能性について研究を推進した．
この研究の端緒となった線形確率微分方程式を伊藤積分で表現したときのみに表出する数学的構造(二次形式構造)の発見に対応し，この数学的構造を離散的にかつ数学的に再現するために発展作用素の離散化作用素として離散的な平方作用素を導入することで二次形式構造を保存する構造保存数値解法の構成可能性についてであるがこれを確かに実現することに成功した．

また，空間領域が多次元になった問題での同様の状況に備えての研究について二段階におよぶ大きな進展を得た．具体的な最初の段階としては，空間領域を Voronoi 分割して得られる Voronoi 領域格子に基づいて構成する離散微分作用素相当である差分作用素と，その離散化積分との間に一般化した 7 つの恒等式が得られることを証明を付して示したことが挙げられる．これらの恒等式を用いることでより高次の恒等式も導出できるため，広く知られた積分公式のほとんどがこれらで離散化できたことに相当する．この研究成果の結果そのものは離散微分形式についての Anil N.Hirani の論文[2]に述べられている結果の一部分と数学的には同値であろうと思われるが，微分形式を用いずに示せることと，なによりその議論の方法が構成的なために次の段階である一般凸多角形領域，つまり非 Voronoi 領域格子，に対して拡張が可能であるという点においてより汎用性の高い成果であると考えられる．そしてこの次の段階が，一般凸多角形

領域における差分作用とその離散化積分の間における一般化された 7 つの恒等式の証明である．この証明における数学的な拡張点は大きく画期的なものではないが，Voronoi 分割という特殊な分割によらずに積分公式のほとんどを厳密に離散化できるという微分幾何学的な面でその結果のもつ意義は大きく，大変に幅広い応用を期待できる成果と考えている．

そしてもう一つの成果は研究計画になかったものであるが大変萌芽的な成果で，非線形な差分作用素の提唱というものである．通常の差分作用素は Taylor 展開に基づいて参照点上の関数値の線形結合を取る形で定義されるため当然線形作用素となるが，この成果は対数を用いて非線形関数として定義するというもので，自由に設定可能な任意パラメータを持ち，近似誤差プロファイルを調節できるというこれまでに無い特徴を持っているものである．そして実際，この非線形差分作用素により波動型偏微分方程式の数値計算を安定に行うことができることを示すことに成功した．これは移流項を保つような確率微分方程式に対しても有効であると思われる優れた成果と考える．

引用文献

[2] Anil N. Hirani, "Discrete Exterior Calculus," PhD Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 2003.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名	４．巻
Okumura Makoto、Daisuke Furihata	40
２．論文標題	５．発行年
A structure-preserving scheme for the Allen-Cahn equation with a dynamic boundary condition	2020年
３．雑誌名	６．最初と最後の頁
Discrete & Continuous Dynamical Systems - A	4927～4960
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.3934/dcds.2020206	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

１．著者名	４．巻
Kojima Hiroki、Matsuo Takayasu、Furihata Daisuke	86
２．論文標題	５．発行年
Some discrete inequalities for central-difference type operators	2017年
３．雑誌名	６．最初と最後の頁
Mathematics of Computation	1719～1739
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1090/mcom/3154	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

１．著者名	４．巻
Miyatake Yuto、Cohen David、Furihata Daisuke、Matsuo Takayasu	34
２．論文標題	５．発行年
Geometric numerical integrators for Hunter-Saxton-like equations	2017年
３．雑誌名	６．最初と最後の頁
Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	441～472
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s13160-017-0252-1	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	該当する

１．著者名	４．巻
Daisuke Furihata, Mihaely Kovaecs, Stig Larsson and Fredrik Lindgren	56
２．論文標題	５．発行年
Strong Convergence of a Fully Discrete Finite Element Approximation of the Stochastic Cahn--Hilliard Equation	2018年
３．雑誌名	６．最初と最後の頁
SIAM Journal on Numerical Analysis	708-731
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1137/17M1121627	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	該当する

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　1件／うち国際学会　8件）

1．発表者名 Daisuke Furihata
2．発表標題 Discrete Gauss, Green and Stokes laws with difference operators on Voronoi meshes and applications
3．学会等名 SIAM: East Asian Section Conference 2019（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Daisuke Furihata
2．発表標題 Discrete Green-Gauss formulae based on finite volume operators using Voronoi mesh and structure-preserving methods
3．学会等名 ICIAM2019（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Daisuke Furihata
2．発表標題 Structure-preserving method using discrete Gauss, Green and Stokes laws on Voronoi meshes
3．学会等名 SciCADE2019（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Daisuke Furihata
2．発表標題 Discrete integration by parts on any convex polygon meshes and its applications to structure-preserving methods for PDEs
3．学会等名 ANZIAM2020（国際学会）
4．発表年 2020年

１．発表者名 Daisuke Furihata
２．発表標題 Structure-preserving methods for PDEs via Green--Gauss formulae on Voronoi cells
３．学会等名 13th SIAM East Asian Section Conference 2018（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Daisuke Furihata
２．発表標題 A method to design structure-preserving schemes for PDEs on Voronoi cells
３．学会等名 Czech-Japan seminar in applied mathematics
４．発表年 2018年

１．発表者名 Daisuke Furihata
２．発表標題 Discrete Gauss, Green and Stokes laws on Voronoi meshes and structure-preserving methods
３．学会等名 Taiwan-Japan joint workshop on numerical analysis and scientific computation
４．発表年 2018年

１．発表者名 Daisuke Furihata
２．発表標題 Structure-preserving methods based on discrete Gauss, Green and Stokes laws on Voronoi meshes
３．学会等名 Autralian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics 2019（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Daisuke Furihata
２．発表標題 Structure-preserving method on Voronoi cells
３．学会等名 Connections in Geometric Numerical Integration and Structure-preserving Discretization（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2017年

１．発表者名 Daisuke Furihata
２．発表標題 Discrete Variational Derivative Method based on Green--Gauss formulae for Voronoi Cell
３．学会等名 International Conference on Scientific Computation and Differential Equations (SciCADE)（国際学会）
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関