様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　６月　５日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：挑戦的研究（萌芽）
研究期間：2017～2022
課題番号：１７Ｋ１８７３９

研究課題名（和文）箙の無限次元ヒルベルト表現の研究

研究課題名（英文）Infinite-dimensional Hilbert representations of quivers

研究代表者
綿谷　安男（Watatani, Yasuo）

九州大学・数理学研究院・名誉教授

研究者番号：００１７５０７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,700,000円

研究成果の概要（和文）：有向グラフの頂点には無限次元ヒルベルト空間を対応させ，有向グラフの辺（矢印）には作用素を対応させるという，箙（quiver）の無限次元ヒルベルト表現を考察し，その直既約表現の構成とそれらの間の既約射を研究した。特に無限次元ヒルベルト空間の２個の部分空間の配置を研究し特別な箙の無限次元ヒルベルト表現とみなしoperator rangeの分類に帰着できることを証明し，非自明な例を構成した。無限次元ヒルベルト空間の３つの部分空間の配置について，さらに研究を深め，double triangleと古典的なブール束の直和になるような配置の特徴づけを完全に行い，最終論文として仕上げた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
箙（quiver）の無限次元ヒルベルト表現を考察し，その直既約表現の構成とそれらの間の既約射を研究した。有限次元の場合の箙の表現はよく知られているが，その無限次元ヒルベルト空間の場合を研究したのは我々の研究が世界で初めてであり意義がある。ビッグデータの位相幾何学的な特徴をとらえるパーシステントホモロジーの研究には有限次元の場合の箙の表現が使われるのでそのこれから先の萌芽的な研究になっている。ヒルベルト空間の２個や３個の部分空間の配置の分類は関数解析での基本的な課題なので，そこに寄与できたことは意味がある。直既約表現の具体的な構成法も提示できたので，これからの発展の糸口にもなった。

研究成果の概要（英文）：We study infinite-dimensional Hilbert representations of quivers, which associate Hilbert spaces and operators for vertices and arrows of quivers and investigate the construction of indecomposable representations and irreducible maps. We study the relative position of two subspaces in a infinite-dimensional Hilbert space as Hilbert representations of a particular quiver. We reduces it to the classification of operator ranges and construct non-trivial examples. We also study the relative position of three subspaces in a infinite-dimensional Hilbert space and completely characterize the direct sums of double triangle and classical Boolean lattice to publish a paper.

研究分野：作用素論、作用素環論

キーワード：quiver　ヒルベルト表現　部分空間の配置　直既約表現

１．研究開始当初の背景

大きな数学的対象 M を全体空間として、それに含まれる小さな対象 N の相対的な位置関係は、多くの異なる領域で、豊かな構造をもっていて、その研究はそれぞれ深いものがある。例えば体 N の拡大体 M の様子を調べるガロワ理論や大きな作用素環 M のなかにはいっている小さな部分作用素環 N の相対的な位置関係を研究する Jones の指数理論がその典型である。また単位円周 N=S1 の 3 次元空間 M= R3 への埋め込みである結び目の研究も相対的な位置関係の豊富さを例証している。研究代表者は 1980 年に Memoir of American Math. Soc.で発表した論文[W]で、C*-環に対する Jones の指数理論を研究していた。そのときに大きな C*-環に含まれる小さな C*-環の指数を定義し K-理論で記述するなどして、相対的な位置関係の研究を行なった。その研究の過程で、大きい数学的対象に含まれる小さな数学的対象の相対位置の研究の重要性と豊かさに気づかされた。そうしているうちに、作用素の作る環ではなく、無限次元ヒルベルト空間に包含される部分空間の位置関係が二つの部分空間の角度以外にまともに研究されていないことに気がついた。よく調べてみると有限次元のベクトル空間の時には Gelfand-Ponomarev による４個までの部分空間の配置の完全分類があることを知った。しかしながら無限次元のヒルベルト空間の n 個の部分空間の配置については、二つの部分空間の間の角度の考察が確立されているだけで、長い間ほとんど何も知られていなかった。そこで私は榎本氏と共同研究を行い、無限次元ヒルベルト空間の４個の部分空間の直既約な配置を非可算無限個構成し、ここにも豊富な構造が存在することを示し、この状況を突破した([EW])。一方、４個の部分空間の直既約な配置は拡大ディンキン図形 D4~に対応する箙の無限次元直既約ヒルベルト表現と見ることができる。連結な箙（quiver）の有限次元直既約表現が有限個しかないものは、ディンキン図形の An,Dn,E6,E7,E8 に限るという Gabrier の研究を想起することで、無限次元ヒルベルト空間で箙(quiver)の表現を研究することに導かれていった。

２．研究の目的

箙（えびら=quiver）とは、有向グラフのことであるが、環論と表現論における研究ではこの別名がよく使われている。今回の研究は、それらの研究の無限次元ヒルベルト空間への拡張を目指すものなので、この用語を用いることにする。箙（quiver）の有限次元表現とは、有向グラフの頂点に有限次元ベクトル空間を対応させ、有向グラフの辺（矢印）には線型写像を対応させたものである。「構造の対称性」を表す数学的概念が群であるなら、「対象の関係性」を表す数学的概念が箙（quiver）=有向グラフである。どちらも簡素ではあるが、基礎的で普遍的に現れる重要なものである。対称性を表す群を調べるにはそれを線型化して、（ユニタリ）行列として表現するのが有力な研究方法である。それと同様に、対象の関係性を表す箙（quiver）=有向グラフを調べるにはそれを線型化して、頂点と矢印を、ベクトル空間と線型写像として、表現するのが有力な研究方法である。群の表現では、無限次元のヒルベルト空間上の作用素として群を表現して研究することが当然のように幅広くなされてきた。しかしながら、箙（quiver）の表現では、そのようなヒルベルト空間を使った無限次元化は、私たちの先駆的な研究を除いては、全くなされていなかった。今回は、有向グラフの頂点には無限次元ヒルベルト空間を対応させ、有向グラフの辺（矢印）には作用素で箙を対応させるという、箙（quiver）の無限次元ヒルベルト表現を考察し、その直既約表現の構成とそれらの間の既約射を研究する。さらに、ヒルベルト表現全体のつくる圏やその導来圏の構造も探求したい。ここで直既約表現とはこれ以上非自明な直和に分解できない表現で、表現全体の building block である。

箙（quiver）=有向グラフの一番簡単なものは、頂点１つにループをつけたもの　◦↻　である。この箙（quiver）のヒルベルト表現というのは、一個のヒルベルト空間 H とその上の作用素 T:H →H を与えることである。ヒルベルト空間 H が有限次元のときは、直既約表現はジョルダン行列を与えることに相当する。ヒルベルト空間 H が無限次元のときはどうなるであろうか。作用素 T として片側シフト作用素をとれば、この不変部分空間の構造がよくわかっていることより、これ以上直和にわかれないことがわかり、（もしくはハーディ空間として実現しておいて、その解析性からといってもよい）、これは直既約表現になっている。この意味で作用素論を内在化していて、ジョルダン行列の無限次元版である strongly irreducible operator の研究を含んでいることがわかる。また、ヒルベルト空間 H の３つの部分空間があると、その全体空間 H への包含写像をとれば、それはディンキン図形の D４型の表現ともみられる。現在では、箙（quiver）の有限次元表現は、量子展開環の Hall 構成、特異点解消の導来圏、ミラー対称性、さらには社会での応用として、ビッグデータを解析するパーシステントホモロジーで使われていて、多くの領域と関連していることが明らかになってきている。そのため、箙（quiver）の無限次元ヒルベルト表現も、このような多くの分野と同じような関連を持つことが十分期待できる。

　箙（quiver）の無限次元ヒルベルト表現は、自然に箙（quiver）の道代数（path algebra）の表現とみることができる。そこで、

群：箙 = 群環 : 道代数 = 群 C*-環 : ?

の比例式をみたすように、 ? のところに何か作用素環である道 C*-代数を導入することを考え

ている。群 C*-環が作用素環論で果たしている重要な役割と同じようなことを夢見ている。また作用素環論における導来圏の研究を進めるための導きの糸になるとにらんでいる。この研究が幸運に恵まれ発展すれば、リー環を Kac-Moody 環へ拡張してときに広大な研究分野が出現したのと同じように、関連する分野が思いがけなく広くて豊かな研究に育っていくことが期待できる。現時点では世界の他の研究者で、無限次元ヒルベルト表現を研究している人は全くいないという絶好のチャンスを生かして、私たちの手でこの新しい企てを種まきから初めて苗作りをして植え付けられるところまで育成していきたい。豊かな実がなるのはまだずっと将来であろうが。

３．研究の方法

（１）．箙（quiver）の無限次元の新しい直既約表現を探す。箙（quiver）の表現で直和に非自明に分解できないものを直既約表現という。これらを探して分類することは、基本的なことである。しかし、一般的にいって無限次元の時は、直既約表現の例を構成するだけでも大仕事である。幸い、Kronecker quiver の場合には、すでにいくつかの無限次元の直既約ヒルベルト表現を私たちはすでに構成している。シフト作用素を使ったその方法が、一般の箙（quiver）の場合の手がかりになるであろう。また、表現の間の射で、可逆元以外をつかって分解できない既約射のよい定義を導入し、ヒルベルト表現の Auslander-Reiten 理論を構築したい。

（２）．箙（quiver）のヒルベルト表現のつくる圏とその導来圏を究明する。森田同値の作用素環版は Rieffel によって導入されて作用素環論で大きな役割を果たしている。今回の研究では、導来同値の作用素環版を導入したい。箙（quiver）の有限次元表現では、箙（quiver）の向きづけをかえたものが、森田同値ではなく導来同値であるものの典型例であった。そこで箙(quiver)の無限次元のヒルベルト表現の場合に箙（quiver）の向きづけをかえたものがどうなるかをしっかり調べることが、導来同値の作用素環版を定義するよい方法を教えてくれるはずだとあたりをつけている。導来同値を与える傾斜加群の作用素環版もそのために必要な概念である。Imprimitive bimodule を拡張するのにどうすればよいかのアイデアも、箙（quiver）の向きづけをかえたものをみることで探る。

（３）．箙（quiver）の道代数の生成する作用素環（C*-環と非自己共役環）を構成する。一個の頂点と一個の loop からなる一番簡単な箙（quiver）の場合は、それぞれ円周 T 上の連続関数環 C(T)と Hardy 環 H∞(T)に対応する。一般の箙（quiver）の場合はどんな非可換な作用素環になるかが問題である。群とそれのつくる群 C*-環の場合には、universal 群 C*-環と reduced 群 C*-環の最低２種類がある。箙（quiver）の無限次元ヒルベルト表現は、自然に箙（quiver）の道代数（path algebra）の表現とみることができる。そこで、箙（quiver）の道代数の universalC*-環を考察してみよう。reducedC*-環に対応するものは、Cuntz-Krieger 環のようにみえる。無限 path の全体を基底とするヒルベルト空間で、辺→を creation する作用素をつくることが既約表現のずらしに対応しているようにみえるからである。この場合、→に対応する作用素は部分等距離作用素になっている。これを単に縮小作用素に置き換えてみたら、どうなるかも気になるところである。さらに非自己共役環の構成が、ハーディ空間論の拡張も与えるはずである。

（４）．Gabrier の定理は、箙（quiver）の有限次元直既約表現が有限個になるのは、ディンキン図形の A 型,D 型,E 型に限るというものだ。　そこで、ディンキン図形の A 型,D 型,E 型をもつ箙（quiver）の無限次元直既約表現の存在と分類を探求するのは意味があるはずだ。特に D 型の無限次元直既約ヒルベルト表現が存在するかどうかは、作用素の不変部分空間の存在に関する関数解析の有名な未解決問題と関係することがわかった。その意味でこの問題は深くて難しいが、研究する価値がある。

（５）．ジョルダン行列の無限次元化は強既約作用素であるが、あるクラスではその分類がわかっているので、それを使って、箙（quiver）の無限次元の直既約表現の分類を実行しよう。また非有界作用素で有界可換子環が自明になる推移作用素はさらに強いクラスになるであろう。表現の言葉でいうとこれは自己準同型環が自明になるといいかえられる。Kronecker quiver の場合には、すでに、両側荷重シフト作用素や片側シフト作用素のランクワン作用素による摂動をつかって、推移的なヒルベルト表現がつくれることまではわかってきたので、これを手がかりとして研究を進めたい。

（６）．有向グラフの頂点にはヒルベルト空間の代わりに一般の無限次元 Banach 空間を対応させ、有向グラフの辺（矢印）には作用素を対応させるという、箙（quiver）の無限次元 Banach 表現も研究する。Gowers の遺伝的直既約空間をつかうことで、箙(quiver)の無限次元直既約 Banach 表現を構成できるかを考察したい。また、Banach 空間の場合には作用素の不変部分空間の存在が否定的に解けている例がすでに構成されている。この場合は頂点１つにループをつけた箙（quiver）◦↻　の直既約表現の存在を意味している。このように、箙（quiver）の無限次元 Banach 表現は古典的な Banach 空間の研究にも密接につながっている。さらに、Banach 空間上の strongly irreducible operator の理論も開拓できるであろう。

４．研究成果

研究が進展するにつれ、当初計画した目的とは違い、予期していない問題のほうが発展して研究成果をえることができたので、それも含めて報告する。

無限次元ヒルベルト空間の２個の部分空間の配置を研究し、特別な箙の無限次元ヒルベルト表現とみなし、operator range の分類に帰着できることを証明し、非自明な例を構成した。

無限次元ヒルベルト空間の３つの部分空間の配置について、さらに研究を深め、double triangle と古典的なブール束の直和になるような配置の特徴づけを完全に行い、最終論文として仕上げた。

作用素論の分野ではすべての作用素を universal に表現するものとして universal model の理論が知られている。この理論を一般の箙の場合に考えて universal model の理論の構築を考えた。作用素論の理論では unilateral shift operator の adjoint operator がその universal model の例であった。今回の研究で、一般の箙の場合は、Cuntz-Krieger 環の生成元の joint operators がその universal model の例になることがわかった。

しかしながら、これらに対する射の解析が非常に難しい事が判明した。それをどうにか打開しようと非線形正写像の研究に着手した。新たな攻略の指針を獲得できたことは研究上望ましいことである。それで作用素環の間の非線形の正写像の例をいろいろ調べている。例えば積だけを保存する写像もそうだし、operator monotone function による functional calculus も非線形の正写像である。また非加法的な測度による積分であるショケ積分や菅野積分も非線形の正写像である。これらの多くの具体例を特徴付けることを試みた。特に行列環上の Choquet 型や菅野型の非線型トレースを導入し特徴付けをおこない、さらに非線型非可換積分論を研究した。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計7件（うち査読付論文　7件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 M. Nagisa and Y. Watatani	4．巻 87
2．論文標題 Non-liner monotone positive maps	5．発行年 2022年
3．雑誌名 J. Operator Theory	6．最初と最後の頁 203-228
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 M. Nagisa and Y. Watatani	4．巻 48
2．論文標題 Non-linear traces on matrix algebra, majorization, unitarily invariant norms and 2-positivity	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Analysis Math.	6．最初と最後の頁 1105-1126
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 T. Kajiwara and Y. Watatani	4．巻 73
2．論文標題 Dimension groups for self-similar maps and matrix representations of the cores of the associated C*-algebras	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Canad. J. Math.	6．最初と最後の頁 1013-1056
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 M. Enomoto and Y. Watatani	4．巻 6
2．論文標題 Systems of two subspaces in a Hilbert space	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Adv. Oper. Theory	6．最初と最後の頁 13 pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 M. Enomoto and Y. Watatani	4．巻 25
2．論文標題 Unbounded strongly irreducible operators and transitive representations of quivers on infinite-dimensional Hilbert spaces	5．発行年 2019年
3．雑誌名 New York J. Math.	6．最初と最後の頁 975-1016
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Masatoshi Enomoto and Yasuo Watatani	4．巻 85
2．論文標題 Relative position of three subspaces in a Hilbert space	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Acta Sci. Math. (Szeged)	6．最初と最後の頁 519-537
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Tsuyoshi Kajiwara and Yasuo Watatani	4．巻 455
2．論文標題 Maximal abelian subalgebras of C*-algebras associated with complex dynamical systems and self-similar maps	5．発行年 2017年
3．雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6．最初と最後の頁 1383-1400
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　3件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 Y. Watatani
2．発表標題 Non-liner monotone positive maps on C*-algebras
3．学会等名 RIMS共同研究「作用素環論の最近の進展」（招待講演）
4．発表年 2022年

１．発表者名
綿谷安男

２．発表標題
Operator theory and non-liner monotone positive maps on C*-algebras

３．学会等名
作用素論作用素環論研究集会（招待講演）

４．発表年
2022年

１．発表者名
渚勝，綿谷安男

２．発表標題
C*-環の間の非線型正写像と行列環上の非線型トレースとmajorization理論

３．学会等名
日本数学会

４．発表年
2022年

１．発表者名
渚　勝、　綿谷　安男

２．発表標題
C*-環の間の非線形正写像

３．学会等名
日本数学会

４．発表年
2022年

１．発表者名
綿谷　安男

２．発表標題
ヒルベルト空間の部分空間の配置と箙のヒルベルト表現

３．学会等名
実関数論・関数解析学合同シンポジウム（招待講演）

４．発表年
2019年

１．発表者名 榎本雅俊、綿谷安男
２．発表標題 二つの部分空間の有界同型の不変量
３．学会等名 日本数学会
４．発表年 2018年

１．発表者名 榎本雅俊と綿谷安男
２．発表標題 ２つの部分空間の同配置問題
３．学会等名 日本数学会
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関