

令和 2 年 6 月 10 日現在

機関番号：12501

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2017～2019

課題番号：17K19957

研究課題名（和文）異常統計の情報数理構造の解明と応用

研究課題名（英文）Elucidation of information structures in anomalous statistics and its applications

研究代表者

須鎗 弘樹（Suyari, Hiroki）

千葉大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：70246685

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,800,000円

研究成果の概要（和文）：べき分布が現れる系（異常統計）においては、個々の観測により得られる観測値のスケールが観測によって変わってしまうことを明らかにした。これは、従来の指数関数族の世界でなかった事実であり、これにより、異常統計の背景となる確率論の理論構築が難しくなる。しかし、これに対して、見通しの良い解決法を見つけることができた。具体的には、 $q$ -指数関数による表現ではなく、 $q$ -対数関数による表現を使えば、統一したスケールで理論構築が可能になることを示した。これにより、なぜ、べき分布が観測されるのかが理解でき、べき分布が現れる系（異常統計）のモデリングが可能になる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

べき分布が現れる系（異常統計）においては、個々の観測により得られる観測値のスケールが観測によって変わってしまうことを明らかにした。これは、従来の指数関数族の世界でなかった事実であり、これにより、異常統計の背景となる確率論の理論構築が難しくなる。しかし、これに対して、見通しの良い解決法を見つけることができた。これにより、なぜ、べき分布が観測されるのかが理解でき、べき分布が現れる系（異常統計）のモデリングが可能になる。

研究成果の概要（英文）：Addition and subtraction of observed values can be computed under the obvious and implicit assumption that the scale unit of measurement should be the same for all arguments, which is valid even for any nonlinear systems. This study starts with the distinction between exponential and non-exponential family in the sense of the scale unit of measurement. In the simplest nonlinear model, it is shown how typical effects such as rescaling and shift emerge in the nonlinear systems and affect observed data. Based on the present results, the two representations, namely the  $q$ -exponential and the  $q$ -logarithm ones, are proposed. The former is for rescaling, the latter for unified understanding with a fixed scale unit. For the theoretical study of nonlinear systems,  $q$ -logarithm representation is shown to have significant advantages over  $q$ -exponential representation.

研究分野：情報数理

キーワード：異常統計 Tsallis統計 複雑系 べき分布

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

独立な情報源(確率変数)の確率論は、すでに確立されており、その多くを大学の理系学部で学ぶ。しかし、異常統計が観測されるとき、その情報源(確率変数)は独立ではなく、むしろ、強い相関を有する。そのため、独立な情報源を前提にした従来の確率論を適用できず、モデリングを困難にしている。数学的には、独立な情報源は指数関数族に属し、非独立な情報源は、べき関数族に属する。これは、指数法則を表す積が独立性と合致するからである。研究開始当初、この数理を手がかりにして、すでに、次の表の結果を得ていた。(詳細は、代表者の単著「複雑系のための基礎数理(牧野書店, 2010)」に詳しい。)

	指数関数族	べき関数族
基本方程式	$dy/dx=y$	$dy/dx=y^q$
基本関数	指数関数	q-指数関数
基本情報量	Shannon エントロピー	Tsallis エントロピー
乗法	積	q-積
q	q=1(独立性)	q(一般化次元の q)
ダイバージェンス	KL ダイバージェンス	ダイバージェンス

この数理を元にして、確率論の極限定理(大数の法則, 中心極限定理, 大偏差原理)ならびに情報理論における符号化定理(情報源符号化定理, 通信路符号化定理)を構成できると考えていた。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、代表者の上のような今までの成果を基礎にして、「べき分布」に特徴的なスケール不変性・長時間(距離)相関の性質を有する基礎数理を確立し、確率論、情報理論、統計力学、異常統計のモデリングなどの諸分野に応用することであった。特に、下表の右側にある確率論の三大極限定理、情報理論の二大符号化定理を明らかにしていくことである。

	指数関数族	べき関数族
確率論	i. i. d. の場合の三大極限定理	スケール不変性・長時間(距離)相関の場合の三大極限定理
情報理論	二大符号化定理	確率論独立な場合の三大極限定理 スケール不変性・長時間(距離)相関の場合の三大極限定理
統計力学	Boltzmann-Gibbs 統計力学	Tsallis 統計力学

### 3. 研究の方法

研究開始当初に、q-二項分布からダイバージェンスを導き、q-二項分布に従う系におけるレート関数として、ダイバージェンスが自然に現れる結果を得ていた。これより、q-二項分布からドモアブル・ラプラスの定理(中心極限定理の基本形)のべき関数族への一般化が最初のステップである。そして、q-二項分布のモデルとして、ランダムウォークの一般化を予定していた。しかし、次の研究成果で述べるように、問題が多々見つかリ、研究はなかなか進まなかった。

状況を打開するために、3年間の研究期間のうち、最終年(3年目)の最初の半年(2019年4月-10月の6か月間)は、ヨーロッパで複雑系の研究所として有名な Complexity Science Hub に滞在し(Host は、Stefan Thurner 教授)、自身の研究も含め、共同研究を進めた。この滞在の直前にある気付きを得て、それが非常に重要であることに気付き、論文にまとめた。

### 4. 研究成果

一般に、自然科学における観測値は、一つの絶対的なスケールで測り、その値で現象を理解する。それゆえに、これらの和や差などの基本的な演算を行うことができる。これらと和や差は、同じスケールで測っているからこそ、和や差などを計算できる。これは暗黙の了解である。たとえば、あるモノの長さを測るとき、スケール(目盛)の異なる2つのものさしを使ったとする。スケール(目盛)を固定して、それを終始、使うならば、その和や差を計算するのは、同じスケールなので問題ない。しかし、スケール(目盛)が違う2つのものさしで測ったそれぞれの結果の和や差を計算することはできない。これは、当たり前である。しかし、このことは、本研究課題で取り扱う、指数関数族とべき関数族の違いに深く関わっている。つまり、指数関数の基本的な性質である指数法則  $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$  において、x と y は、同じスケール(目盛)上の値である。なぜなら、 $x+y$  という計算がこの指数法則に含まれているからである。しかも、これは、

同じスケール上のずらしとも考えることができる。しかし、べき関数族、特に、本研究課題で取り扱う  $q$ -指数関数では、通常の数法則は、当然、成り立たず、 $\exp_q(x+y)=\exp_q(x)\exp_q(y/(1+(1-q)x))$  が成り立ち、 $x+y$  が含まれているため、これらは、同じスケール(目盛)上の値であるが、 $R^2$  上における観測の結果 ( $x$  と  $y/(1+(1-q)x)$  のこと) は、 $y/(1+(1-q)x)$  というスケール変換のため、もはや同じスケール上の値ではない。このスケール変換があるために、正規化など、確率論としての様々な基本的な問題を生み出していることに気づいた。通常の数関数では、基本的に、引数の和あるいは差のみで計算できるため、一定のスケール上での計算に統一できるので、このような問題は生じない。しかし、 $y/(1+(1-q)x)$  のようなスケール変換は、スケール(目盛)が変わることを意味しており、議論が非常に複雑になってしまう。特に、連続する観測において、それぞれの観測値のスケール(目盛)が変わってしまうと、もはや統一した議論をすることは、ほぼ不可能である。しかし、この問題の見通しの良い解決方法が見つかった。それは、 $q$ -指数関数による表現ではなく、 $q$ -指数関数の逆関数である  $q$ -対数関数を使えば、統一したスケールで議論できることに気づいた。その具体的な問題例とその解決方法は、研究成果の論文で発表した。複雑系の分野では、個々の観測で、スケール(目盛)が違うのに、同じスケールとして議論している論文がほとんどである。スケールが観測ごとに変わる、べき関数族の世界において、この気付きは、非常に深遠であり、かつ、基本的であるが、本分野では、研究代表者以外に、誰も気付いていないと思われる。特に、従来の基本的な数理である、測度論や確率論にも拡張を迫ることになる。現在、ドモアブル・ラプラスの定理(中心極限定理の基本形)のべき関数族への一般化の論文を執筆中であり、今後、なぜ、べき分布が自然界によく現れるのかという根本的な問題を、これら基礎数理の整備をもって、解決できる方法が見つかった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Suyari Hiroki, Matsuzoe Hiroshi, Scarfone Antonio M.	4. 巻 229
2. 論文標題 Advantages of q-logarithm representation over q-exponential representation from the sense of scale and shift on nonlinear systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The European Physical Journal Special Topics	6. 最初と最後の頁 773 ~ 785
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1140/epjst/e2020-900196-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 1件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Hiroki Suyari
2. 発表標題 -divergence appeared as rate function in large deviation estimate
3. 学会等名 The Ninth International Conference on Guided Self-Organisation (GSO-2018) : Information Geometry and Statistical Physics (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroki Suyari
2. 発表標題 -geometry and q-statistics, straightly derived from the fundamental nonlinear differential equation $dy/dx=yq$
3. 学会等名 CSH Workshop: Information-theoretic methods for complexity science (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	Stefan Thurner  (Stefan Thurner)	ウィーン複雑系科学研究所・教授	

## 6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 協力 者	Antonio Scarfone  (Antonio Scarfone)	複雑系研究所 - CNR・Researcher scientist	