

令和 3 年 8 月 18 日現在

機関番号：12601

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化）

研究期間：2018～2020

課題番号：17KK0093

研究課題名（和文）粘性解理論，弱KAM理論の考究とハミルトン・ヤコビ方程式の漸近解析への応用

研究課題名（英文）Research on the theories of viscosity solution, weak KAM, and application to the asymptotic analysis on Hamilton-Jacobi equations

研究代表者

三竹 大寿 (Mitake, Hiroyoshi)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：90631979

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 11,000,000円

渡航期間： 1ヶ月

研究成果の概要（和文）：補助事業期間（平成30年度～令和2年度）では、三つのテーマ、(テーマ1)：HJ方程式の漸近解析（長時間挙動，均質化問題），(テーマ2)：結晶成長をモデルとした方程式に関する解析，(テーマ3)：平均場ゲーム理論に関する選択問題の解析について取り組み，幾つかの重要な結果を得ることができた。特に，ハミルトン・ヤコビ方程式の均質化問題の収束率とその最適性に関する研究は，PDE的手法だけ解析することは難しく，長らく案件とされてきた。これを受入共同研究者のYifeng Yu教授との共同研究として一部解決できたことは意義深い。

研究成果の学術的意義や社会的意義

補助事業期間中に，最適確率制御問題に現れる退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式と呼ばれるクラスの方程式に適用できるよう，弱KAM理論の一般化に取り組んだ。従来の弱KAM理論は決定論的な力学系しか扱えないため，新しい道具立てを必要とした。この点を偏微分方程式論から見直すことで決定論及び確率論を統一する一つの新しい枠組みを幾つか作ることに成功してきた。応用として，漸近解析（長時間挙動，均質化問題）について解決した。これらの成果は，偏微分方程式論における粘性解理論，弱KAM理論において，特に重要な学術的意義を持つと期待できる。

研究成果の概要（英文）：The main subject of my research is nonlinear Partial Differential Equations, and in particular I have made some special effort to the study on the Hamilton-Jacobi (HJ) equation. This equation is an important fundamental equation for various branches of science like classical mechanics, geometric optics, calculus of variations, optimal control and differential games. During the project period, I focused on problems related to various properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations appearing in the context of classical mechanics and crystal growth. In particular, I have worked on the following topics: (a) Asymptotic analysis on Hamilton-Jacobi-Bellman equations (the large time behavior, homogenization), (b) Analysis on the birth-and-spread model equation appearing in the crystal growth, (c) Selection problems for the mean field game. I got several new and important results and published 9 (peer-reviewed) papers.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：ハミルトン・ヤコビ方程式 均質化問題 長時間挙動 粘性解理論 Aubry-Mather理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初、私が研究対象として扱ってきたものは非線形偏微分方程式であり、特に Hamilton-Jacobi (HJ) 方程式に重点を置いてきた。この HJ 方程式は、解析力学、幾何光学、最適制御、微分ゲームにおける重要な基礎方程式であり、その研究の歴史は 150 年以上の長きに及ぶ。近年、同方程式に対する均質化、解の長時間挙動といった、基本的な漸近解析が著しく進展してきた。これらの解析では、偏微分方程式における粘性解理論が基本的な役割を果たしているが、私は、従来の同理論に比べ、より一層、力学系理論との関連に注目してきた。具体的には、同方程式の背景にあるハミルトン系、又は確率ハミルトン系の関係を深めようとする弱 KAM 理論、またその一般化について、その発展に貢献してきた。

HJ 方程式は完全非線形偏微分方程式に分類されるもので、非線形性が強く、古典的な意味での解を考えると初期値問題や境界値問題の可解性は一般には成立しない。この困難を解決するために、Michael G. Crandall 教授と Pierre-Louis Lions 教授は一般化された解(あるいは弱解)としての粘性解を導入した(Trans. Amer. Math. Soc. 277,1983 年)。この粘性解理論の導入により、HJ 方程式のような完全非線形偏微分方程式の取り扱いが整備された。その後の発展により 2 階の退化楕円型、放物型の完全非線形偏微分方程式に対する弱解として重要な役割を担っている。この粘性解理論を力学系の観点から見直す取り組みが、2000 年頃から始まった。特に、Aubry-Mather 理論との関係を整理することで定常 HJ 方程式に対する理解が飛躍的に進展した。これらは、20 世紀天体力学の最大の成果の一つである Kolmogorov, Arnold, Moser らによる理論(以下、KAM 理論と呼ぶ)を背景に、粘性解という弱解を利用した理論ということで、Albert Fathi 教授により弱 KAM 理論と提唱された。

私は、この弱 KAM 理論を偏微分方程式論の立場から発展させることを目指した。特に偏微分方程式に現れる幾つかの漸近解析において、弱 KAM 理論を援用した結果を挙げてきた。本基金における国際共同研究が始まるまでに、「退化粘性 HJ 方程式の長時間挙動の解析」、「退化粘性 HJ 方程式のディスカウント近似に関する選択問題の解析」の二つのテーマに関して重要な成果を挙げた(Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 32, 2015 年, Adv. Math. 306, 2017 年)。これらの研究では、極限問題に一意性がない場合において、それぞれの極限問題について極限の一意性(解の収束)について示すことに成功した。一方で、「退化粘性 HJ 方程式の長時間挙動の解析」において、その極限がどのように初期値に依存するのか、または、定常問題のどの解に収束するのか、については全く分かっていなかった。(課題 1)

また、別の関連した漸近問題として、材料科学で認知される均質化問題を挙げる。この問題は、HJ 方程式の特異極限問題として記述されることは、よく知られ、1980 年後半から様々な研究が繰り返され、多くの研究が進展してきた。先行結果として、解が一様収束して、その極限問題についても明らかになっている。さらに、この収束率について、石井-Capuzzo-Dolcetta (2001)が興味深い結果を得ているが、その収束率の最適性については一切知られていなかった。この収束率については、背景にあるハミルトン系の解の挙動が関係していることが推測されていたが、それらの情報を解析して、解の挙動と結びつける解析手法に乏しかった。(課題 2)

その他の非線形偏微分方程式として、結晶成長をモデルとした「生成伝播方程式」や平均場ゲーム理論に現れる「HJ 方程式と Fokker-Planck 方程式の連立系」について興味を持っていた。

2. 研究の目的

本基金における国際共同研究の受け入れとなった、Yifeng Yu 教授(カリフォルニア大学、アーバイン校)は、研究背景に述べた「粘性解理論」、「弱 KAM 理論」の両方に精通した国際的にも数少ない専門家であり、私の研究背景との関係性が深いため、共同研究を試みることで HJ 方程式または退化粘性 HJ 方程式の漸近解析の進展が期待された。具体的には次の三つのテーマ、(テーマ 1). HJ 方程式の漸近解析(長時間挙動、均質化問題)、(テーマ 2). 結晶成長をモデルとした方程式に関する解析、(テーマ 3). 平均場ゲーム理論に関する選択問題の解析について、研究を進展させることを目的とする。

特に、テーマ 1 については、「研究開始当初の背景」に述べた課題 1、課題 2 について解明することを目的とする。テーマ 2 については、水平方向には界面運動方程式 $V = \kappa + 1$ (ここで、 V , κ はそれぞれ界面上の法線速度、平均曲率)に従い発展し、垂直方向には核生成を促すための外力を加えた生成伝播方程式の解の長時間挙動について考える。同方程式を通して、伝播と複数の核生成を与えるそれぞれの外力がどのように相互作用をもたらして、結晶成長の速さに影響を与えるかを理解することが目的である。テーマ 3 については、HJ 方程式と Fokker-Planck 方程式の連立方程式系について、ディスカウント近似に関する選択問題について考察する。同連立系においては、同研究は国際的にもまだないので、まずは問題の設定をうまくすることを目的とする。

3. 研究の方法

国際共同加速基金ということで、受け入れ研究者の Yifeng Yu 教授を長期訪問することで、

研究を促進することを計画していた。具体的には、渡航計画1「2019年9月15日～2019年9月30日」、渡航計画2「2020年3月15日～2020年3月25日」、渡航計画3「2020年7月1日～2021年3月30日」の期間で渡航を計画していたが、新型コロナの流行により、渡航計画2、3については中止せざる終えなかった。渡航計画1において、HJ方程式の均質化問題についてディスカッションをして、解析の糸口について発見した。帰国後も email、オンラインミーティングを繰り返すことで、テーマ1について進展させることができた。その詳細は「研究成果」で述べる。

4. 研究成果

補助事業期間（平成30年度～令和2年度）の間に、(テーマ1). HJ方程式の漸近解析（均質化問題，長時間挙動）に関する論分を6本（1本は，投稿中のプレプリント），(テーマ2). 結晶成長をモデルとした方程式に関する解析に関する論文を2本，(テーマ3). 平均場ゲーム理論に関する選択問題の解析に関する論文を1本を発表した。

ここでは，テーマ1に関する成果の詳細を述べる。まず，HJ方程式の均質化問題は，1987年に Lions, Papanicolaou, Varadhanによる有名な未発表論文により提唱された後，劇的に研究が進展した。しかし，PDE的手法だけでは収束率やその最適性について解析することは難しく，長らく案件とされてきた。2018年度から2020年度にかけて，Yifeng Yu教授（カリフォルニア大学アーバイン校）と Hung V. Tran 准教授（ウィスコンシン大学マディソン校）と共に Aubry-Mather 理論の観点から問題を見直して一部最適な収束率を得た。次に，退化粘性 HJ 方程式の解の長時間挙動の研究については，長時間後に定常問題のある解に収束することが知られていた。しかし，対応する定常問題の解の多重性から，どの解が選択されるかについては，未解決であった。この点について，退化粘性 HJ 方程式の背景にある，確率ハミルトン系を取り扱えるよう，弱 KAM 理論を一般化をして，長時間後のプロファイルに応用できるかについて解明することに成功した。これらの結果は，偏微分方程式論における粘性解理論，弱 KAM 理論において，特に重要な学術的意義を持つと期待できる。

テーマ2に関する研究では，結晶成長をモデルとして，生成伝播方程式を導出し，この解の成長速度に関する漸近解析を進展することができた。テーマ3については，平均場ゲーム理論に現れる HJ 方程式と Fokker-Planck 方程式の連立系に対して，割引消去問題について考察した。古典解を持つための十分条件について解明し，その場合の割引消去問題の極限について解析した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 7件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Y. Giga, H. Mitake, T. Ohtsuka, H. V. Tran,	4. 巻 70
2. 論文標題 Existence of asymptotic speed of solutions to birth and spread type nonlinear partial differential equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Indiana Univ. Math. J.	6. 最初と最後の頁 121 ~ 156
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 H. Mitake, H. Ninomiya, K. Todoroki	4. 巻 22
2. 論文標題 A level set approach for multi-layered interface systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Interfaces and Free Boundaries	6. 最初と最後の頁 383 ~ 400
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/IFB/444	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 D. A. Gomes, H. Mitake, K. Terai	4. 巻 15
2. 論文標題 The selection problem for some first-order stationary Mean-field games	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Networks & Heterogeneous Media	6. 最初と最後の頁 681 ~ 710
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/nhm.2020019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Y. Giga, Q. Liu, H. Mitake,	4. 巻 120
2. 論文標題 On a discrete scheme for time fractional fully nonlinear evolution equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 151 ~ 162
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3233/ASY-191583	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 W. Jing Wenjia, H. Mitake Hiroyoshi, H. V. Tran	4. 巻 268
2. 論文標題 Generalized ergodic problems: Existence and uniqueness structures of solutions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 2886 ~ 2909
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.09.046	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Y. Giga, H. Mitake, H. V. Tran,	4. 巻 25
2. 論文標題 Remarks on large time behavior of level-set mean curvature flow equations with driving and source terms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - B	6. 最初と最後の頁 3983 ~ 3999
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcdsb.2019228	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Mitake, H. V. Tran, Y. Yu	4. 巻 233
2. 論文標題 Rate of Convergence in Periodic Homogenization of Hamilton?Jacobi Equations: The Convex Setting	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Archive for Rational Mechanics and Analysis	6. 最初と最後の頁 901 ~ 934
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00205-019-01371-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Mitake, K. Soga	4. 巻 57
2. 論文標題 Weak KAM theory for discounted Hamilton?Jacobi equations and its application	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 32
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-018-1359-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Mitake, H. V. Tran	4. 巻 146
2. 論文標題 On uniqueness sets of additive eigenvalue problems and applications	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 4813 ~ 4822
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14152	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 D. A. Gomes, H. Mitake, H. V. Tran	4. 巻 70
2. 論文標題 The selection problem for discounted Hamilton-Jacobi equations: some non-convex cases	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 345 ~ 364
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/07017534	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計25件 (うち招待講演 25件 / うち国際学会 13件)

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 凝結・分裂モデルに現れるハミルトン・ヤコビ方程式
3. 学会等名 第38回 九州における偏微分方程式研究集会, オンライン開催. (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 退化粘性Hamilton-Jacobi方程式の長時間挙動
3. 学会等名 2020年度「微分方程式の総合的研究」, オンライン開催. (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 Large time behavior for a Hamilton-Jacobi equation in a critical Coagulation-Fragmentation model
3. 学会等名 Seoul-Tokyo Conference, オンライン開催. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 粘性ハミルトン・ヤコビ方程式に対する弱KAM理論とその応用
3. 学会等名 第688回早稲田大学 応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式とその解の漸近形について
3. 学会等名 金沢解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 On approximation of time-fractional fully nonlinear equations
3. 学会等名 Recent Progress in Nonlinear Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 The large-time profile for Hamilton--Jacobi--Bellman equations
3. 学会等名 New trends in Hamilton-Jacobi: PDE, Control, Dynamical Systems and Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 On the generalized Dirichlet problem for graph mean curvature flow with driving force
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「非線形偏微分方程式における定性的理論」(招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 On birth and spread type nonlinear partial differential equations
3. 学会等名 Geometric and Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の弱KAM理論
3. 学会等名 第7回ハミルトン系とその周辺(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間挙動
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 外力付き平均曲率流方程式の一般化ディリクレ問題について
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 Rate of convergence in periodic homogenization of Hamilton-Jacobi equations
3. 学会等名 第36回九州における偏微分方程式研究集会（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 The large-time profile for Hamilton-Jacobi equations revisited
3. 学会等名 確率論と幾何学（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 The large-time profile for viscous Hamilton-Jacobi equations
3. 学会等名 Conference on PDEs, Dynamical Systems and Probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 The large-time profile for Hamilton--Jacobi--Bellman equations
3. 学会等名 第11回 名古屋微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 粘性解理論とAubry-Mather理論
3. 学会等名 東京大学数理科学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 On large-time behavior for birth-spread type nonlinear PDEs
3. 学会等名 Viscosity Solutions and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 生成伝播型微分方程式の解の長時間挙動に関して
3. 学会等名 偏微分方程式セミナー, 北海道大学. (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 On large-time behavior for birth-spread type nonlinear PDEs
3. 学会等名 Dynamics seminar in Yau Mathematical Science Center (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 On large-time behavior for birth-spread type nonlinear PDEs
3. 学会等名 Mathematical Aspects of Surface and Interface Dynamics 16, 東京大学. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 生成伝播型微分方程式の解の長時間挙動に関して
3. 学会等名 界面現象の数理・モデリング研究合宿2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 On approximation of time-fractional fully nonlinear equations,
3. 学会等名 PDE Geometric Analysis seminar in Univ. Madison-Wisconsin (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 On uniqueness sets of additive eigenvalue problems and applications
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三竹 大寿
2. 発表標題 退化粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の一意性集合
3. 学会等名 東京確率論セミナー, 東京都, 東京大学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

「2020年3月15日～2020年3月25日」, 「2020年7月1日～2021年3月30日」の期間で渡航を計画していたが, 新型コロナの流行により, 中止せざる終えなかった.

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	ユ イーフェン (Yu Yifeng)	カリフォルニア大学アーバイン校・数学科・教授	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
その他の研究協力者	トラン ハン (Tran Hung)	ウィスコンシン大学マディソン校・数学科・准教授	
その他の研究協力者	ゴメス ディオゴ (Gomes Diogo)	キング・アブドゥッラー科学技術大学・応用数学科・教授	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 界面運動，力学系に現れる漸近問題への粘性解的手法とその周辺	開催年 2019年～2019年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	University of California, Irvine	University of Wisconsin- Madison	
サウジアラビア	キング・アブドゥッラー科学技 術大学		
中国	精華大学		