

機関番号 : 14301

研究種目 : 基盤研究 (S)

研究期間 : 2006~2010

課題番号 : 18104001

研究課題名 (和文) 位相的場の理論に基づく, 幾何学の新展開

研究課題名 (英文) New development of geometry based on topological field theory

研究代表者 : 深谷 賢治 (FUKAYA KENJI)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号 : 30165261

研究成果の概要 (和文) :

ラグランジュ多様体のフレアーホモロジーを研究し, その計算応用をおこなった. 理論の基礎となる定義と基本的な構造定理の確立, トーリック多様体の場合の計算, そのシンプレクティックトポロジーとミラー対称性への応用がおもな内容である.

研究成果の概要 (英文) :

We studied Lagrangian Floer homology, its calculation and applications. We established the definition of it in the most general situation, and established various fundamental structure theorems. We calculate it in the case of toric manifolds etc, and applied it to both symplectic topology and Mirror symmetry.

交付決定額

(金額単位 : 円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	13,100,000	3,930,000	17,030,000
2007 年度	10,700,000	3,210,000	13,910,000
2008 年度	12,300,000	3,690,000	15,990,000
2009 年度	12,300,000	3,690,000	15,990,000
2010 年度	14,800,000	4,440,000	19,240,000
総計	63,200,000	18,960,000	82,160,000

研究分野 : 数学

科研費の分科・細目 : 幾何学

キーワード : シンプレクティック多様体, ミラー対称性, フレアーホモロジー

1. 研究開始当初の背景

シンプレクティック幾何学は解析力学(ハミルトン力学系)の研究から始まった分野で, シンプレクティック形式という非退化閉2次形式を保つ変換で不変な幾何学を研究する. 1980年くらいから始まった擬正則曲線の理論の発展で, シンプレクティック多様体の大域的研究が発展し, ハミルトン力学系の周期軌道やラグランジュ部分多様体の交叉, ハミ

ルトン微分同相群やシンプレクティック微分同相群の構造, シンプレクティック多様体やそのラグランジュ部分多様体の分類など多様な研究がなされている. 一方で, 超弦理論における位相的弦理論は, 擬正則曲線の理論と等価であると考えられている. 特に, 超弦理論で見いだされたミラー対称性は, ある空間のシンプレクティック幾何学が別の空間の複素幾何学に対応するという形で定式化され, 活発に研究されている.

2. 研究の目的

- (1) 位相的場の理論を偏微分方程式を用いたモジュライ空間の研究とホモトピー代数をもとに構築するという、一般的な枠組みを確立すること。
- (2) そのために、倉西構造の理論を一般的な理論的枠組みとして完成させること。
- (3) 関数解析的な方法のモジュライの研究と、代数的なものとの融合をはかること。
- (4) オペラッドをどのような形で、モジュライ空間に基づく代数系の構成に関わらせるかを、組織的に研究する。
- (5) ミラー対称性の証明を追求する。
- (6) ループ空間のコホモロジーに代数構造を入れ、これを擬正則曲線のモジュライ空間の研究に応用する。
- (7) シンプレクティック幾何学への応用を推進する。

3. 研究の方法

次元多様体の不変量である(ゲージ理論版)フレアーホモロジーを境界付き3次元多様体に拡張するには、曲面の基本群の表現空間(シンプレクティック多様体)のラグランジュ部分多様体に対して、それぞれ群を決める定式化が自然である。より組織的にするために、シンプレクティック多様体に対して、ラグランジュ部分多様体が対象でフレアーホモロジーが射であるカテゴリー(正確には A 無限大カテゴリー)を導入した。

これを確立するには横断正則性の問題があり、それを解決するために、スキームの概念の C 無限大版を作り、多価の抽象的摂動を考察すればよいことを小野薫氏と見いだした。(これは他の問題にも応用がある。)その後、 A 無限大カテゴリーのホモロジー代数の研究や、チェインレベルの交叉の理論などを用いてラグランジュ部分多様体の研究を継続している。

4. 研究成果

- (1) トーリック多様体のフレアーホモロジーの研究を行った。(小野薫・太田啓史・Y. -G. Oh 氏との共同研究。)トーリック多様体のファイバー(であるラグランジュ部分多様体)のフレアーホモロジーが0にならないのがあるかを組織的に計算する方法を見いだし、フレアーホモロジーが0にならないファイバーの個数がベッチ数に等しいことを(始めはファン多様体の場合に後には一般のトーリック多様体の場合に)証明した。これは堀・Vafa のミラー対称性の研究の第2ステップを数学的に実行していることにあたり、また、Givental の研究とも関係が深い。新しい点は、スーパーポテンシャルが幾何学的に意味ある形(open-closed Gromov-Witten理論の母関数)として導入されている点、複

素数体上ではなく \mathbb{C} 環上で理論が構成されている点である。(この結果はシンプレクティック幾何学へ応用がある。)この理論はトーリック多様体の量子コホモロジーとスーパーポテンシャルの齋藤恭司理論のミラー対称性と捉えるべきで、現在その方向で進展中である。

この研究を継続されトーリック多様体のファイバーのフレアーホモロジーを組織的に計算する方法を見いだした。また、トーリック多様体のホモロジー的ミラー対称性の証明を上記3名と M. Abouzaid の共同研究で行った。(最後の点は論文執筆中。)

- (2) ラグランジュ部分多様体の手術とフレアーホモロジーの関係の研究を継続し、長い完全系列を構成した。

フレアーホモロジーの巡回対称性を確立し、非アルキメデスの収束を証明した。これを元に、3次元キャラビ-ヤウ多様体とそのマスロフクラスが消えるラグランジュ部分多様体の不変量を構成した。また、族のフレアーホモロジーを用いて2次元の場合のホモロジー的ミラー対称性を与えると思われる関手を構成した。

- (3) 2次元球面の2つの直積上のハミルトン微分同相群の普遍被覆群上に無限個の実数全体のなすアーベル群への擬準同型写像があることを、小野薫・太田啓史・Y. -G. Oh 氏との共同研究で見いだした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

- (1) K. Fukaya, Y. -G. Oh, H. Ohta, K. Ono, Anchored Lagrangian submanifolds and their Floer theory. in 'Mirror symmetry and tropical geometry', 15-54, Contemp. Math., 527, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2010).
- (2) K. Fukaya, Cyclic symmetry and adic convergence in Lagrangian Floer theory, Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 3, 521- 590.
- (3) K. Fukaya, Differentiable operad, Kuranishi correspondence, and Foundation of topological field theories based on pseudo-holomorphic curves, in 'Arithmetic and geometry around quantization',

123-200, Progr. Math., 279, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (2010).

(4) K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I, Duke Math. J. 151 (2010), no. 1, 23-174.

(5) K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, K. Ono, Canonical models of filtered A_∞ -algebras and Morse complexes. New perspectives and challenges in symplectic field theory, 201-227, CRM Proc. Lecture Notes, 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2009).

(6) K. Fukaya, P. Seidel, I. Smith, The symplectic geometry of cotangent bundles from a categorical viewpoint, in 'Homological mirror symmetry', 1-26, Lecture Notes in Phys., 757, Springer, Berlin, (2009).

(7) K. Fukaya, P. Seidel, I. Smith, Exact Lagrangian submanifolds in simply-connected cotangent bundles, Invent. Math. 172 (2008), no. 1, 1-27.

(8) K. Fukaya, Application of Floer homology of Lagrangian submanifolds to Symplectic Topology. in 'Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology', 231-276, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 217, Springer, Dordrecht, (2006).

[学会発表] (計7件)

(多数になるので, 最終年度の代表者の講演に限った.)

(1) K. Fukaya, Lagrangian Floer theory and Mirror symmetry, C.-C. HSIUNG INTERNATIONAL SYMPOSIUM IN GEOMETRY AND TOPOLOGY, 2010年5月28日, Lehigh University (アメリカ)

(2) K. Fuakya, Anti-holomorphic involution in Lagrangian Floer theory, STRUCTURES REELLES SUR LES VARIETES COMPLEXES : RESULTATS ET PERSPECTIVES, 2010年6月16日 Luminy (フランス)

(3) K. Fuakya, Mirror symmetry between Toric A model and Landau-Ginzburg B

model, Yamabe symposium, 2010年10月10日, University of Minnesota (アメリカ)

(4) K. Fukaya, Hochschild and cyclic cohomology in Lagrangian Floer theory and Mirror symmetry, Higher structure in Math. and Physics 2010, 2010年10月25日, Schrödinger institute (オーストリア)

(5) K. Fuakya, Homological mirror symmetry between toric A model and Landau-Ginzburg B model, Hayashibara Forum, 2010年11月5日, 京大数理研

(6) K. Fuakya, Calculations and applications of Lagrangian Floer cohomology, From Dynamical Systems to Symplectic Topology Conference in honour of Edi Zehnder on the occasion of his 70th birthday, 2010年11月12日, ETH Zurich (スイス)

(7) K. Fukaya, ラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーの計算と応用, 京都大学大談話会, 2010年11月17日, 京都大学

[図書] (計2件)

(1) K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction. Part I. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 46.1. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2009. xii+396 pp. ISBN: 978-0-8218-4836-4. (with Y.-G. Oh, H. Ohta, K. Ono).

(2) K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction. Part II. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 46.2. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2009. pp. i-xii and 397-805. ISBN: 978-0-8218-4837-1. (with Y.-G. Oh, H. Ohta, K. Ono).

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

深谷 賢治 (KENJI FUKAYA)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30165261

(2) 研究分担者

中島 啓 (NAKAJIMA HIRAKU)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：00201666

河野 明 (KONO AKIRA)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00093237

加藤 毅 (KATO TSUYOSHI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：20273427

上 正明 (UE MASA AKI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80134443

加藤 文元 (KATO FUMIHARU)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：50294880

太田 慎一 (OHTA SHIN-ICHI)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：00372558

(3) 連携研究者

()

研究者番号：