

平成 22 年 5 月 1 日現在

研究種目： 基盤研究(A)
 研究期間： 2006 ～ 2009
 課題番号： 18204001
 研究課題名（和文） 格子、保型形式とモジュライ空間の研究
 研究課題名（英文） Research on lattices, automorphic forms and moduli spaces

研究代表者
 金銅 誠之（Shigeyuki Kondo）
 名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
 研究者番号：50186847

研究成果の概要（和文）：いくつかの方程式の零点の集まりとして定まる図形（代数多様体）の構造や対称性および図形のある種の分類（モジュライ空間）を行うことが本研究課題の目的であった。このための研究手段として格子理論（座標平面の整数点の集合の一般化）やある種の不変性を持った関数等（保型関数、保型形式）を用いることが本研究の特色である。近年、興味を持たれている K3 曲面と呼ばれる代数多様体や関連する代数多様体の対称性およびモジュライ空間の記述で成果が得られた。

研究成果の概要（英文）：The purpose of the research is to study symmetries of algebraic varieties defined as the set of zeros of several polynomials and to describe the moduli of them. To do this, we employ the theory of lattices (a generalization of integral points on the plane) and invariant functions (automorphic functions, forms), which is a key idea of this research. We have obtained several results on symmetries and moduli of interesting algebraic varieties called K3 surfaces and related varieties.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	7,800,000	2,340,000	10,140,000
2007 年度	6,500,000	1,950,000	8,450,000
2008 年度	6,500,000	1,950,000	8,450,000
2009 年度	6,600,000	1,980,000	8,580,000
年度			
総計	27,400,000	8,220,000	35,620,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：格子、保型形式、モジュライ、K3 曲面、Del Pezzo 曲面、有界対称領域

1. 研究開始当初の背景

代数幾何学にとどまらず有限単純群論や数理物理学などに格子理論や保型形式が現れる。特に楕円曲線の高次元版の一つである K3 曲面に自己同型として作用する有限群と散在型有限単純群の一つであるマシュー群

との関係が格子理論を通して明らかになり、有限単純群のある予想の解決が目的で Borcherds が提供した保型形式論が K3 曲面のモジュライ空間の研究に有用であること、ミラー対称性予想を通じた数理物理と代数幾何学の関係など、代数幾何学と他分野と

の関係を示唆する現象が明らかになってきていた。

2. 研究の目的

本研究課題では、研究開始当初の背景に述べたような周辺分野も視野に入れ以下の研究を行うことが目的であった。

(1) K3 曲面の周期理論を適用して、種々の代数多様体のモジュライ空間の記述を行う。さらに、ここで得られたモジュライ空間の記述をもとに、Borcherds の保型形式論を適用しモジュライ空間の幾何学的性質を調べる。

(2) 格子理論を用い、K3 曲面や関係する代数多様体の構造や自己同型として作用する有限群の研究を行う。

(3) 上記の研究を通して周辺分野との関連を調べる。

3. 研究の方法

この研究では、本研究テーマに近い研究者や周辺分野の専門家との研究連絡を中心に行った。世界各地で開催される研究集会へ参加するとともに、毎年トピックスを取り上げて国際研究集会を組織運営し研究交流を図り、本研究課題の遂行の足がかりとした。主催した国際研究集会は以下の通りである。

(1) Workshop "Fake Projective Planes and Arithmetic Quotients, 平成 18 年 7 月 24 日～25 日、名古屋大学。

(2) Birational Automorphisms of Compact Complex Manifold and Dynamical Systems, 平成 19 年 8 月 27 日～31 日、名古屋大学。(3) Algebraic Geometry in Positive Characteristics and related Topics, 平成 20 年 11 月 5 日～7 日、名古屋大学

(4) Moduli and Discrete Groups, 平成 21 年 6 月 8 日～12 日、京都大学

さらに本学に研究者を招聘し本研究課題に関して研究討論を行った。また博士後期課程の学生を研究補助のため RA として雇用した。

4. 研究成果

(1) モジュライ空間に関する主な成果

① K3 曲面の周期理論を用いて Del Pezzo 曲面のモジュライ空間がすべて複素超球の算術商として記述できること、および種数 6 の代数曲線のモジュライ空間が IV 型有界対称領域の算術商として記述できることを示し、その佐武コンパクト化を幾何学的に調べた。

② Borcherds の保型形式論を適用して種数 3 の代数曲線、超楕円曲線のモジュライ空間

の射影モデルを構成し古典的に知られた Coble 達の結果の再構成を行った。さらに射影直線の 6 点のモジュライとして現れる Segre cubic 3-fold および Igusa quartic 3-fold についても同様の結果を得た。

③ 向井は次数 30, 32 の偏極 K3 曲面のモジュライ空間の単有理性を示した。

(2) 自己同型や格子理論に関連する主な成果

① 次数 23 のマッシュ群の極大部分群で正標数の超特異 K3 曲面に自己同型として作用できる例(標数 0 では起こらない)を構成した。また標数 2 の特別な超特異 K3 曲面の新しい具体的構成をリーチ格子の幾何学を用いることで得た。

② 向井はエンリケス曲面のコホモロジー群に自明に作用する対合および鏡映として作用する対合の分類を行った。

③ 小木曾は K3 曲面の高次元化であるコンパクト超ケーラー多様体の双有理自己同型群の構造を複素力学系の観点も取り入れて調べた。特にコンパクト超ケーラー多様体の任意の双有理型変換部分群は有限生成 almost abelian group であるかまたは非可換自由群を部分群にもつことを示した。さらに後者の例を Mordell-Weil 群を用いて幾何学的に構成する方法を与えた。また非射影的なコンパクト超ケーラー多様体の双有理型変換群はつねに有限生成 almost abelian group であることを示した。

④ 島田はピカール数が 20 となる数体上定義された K3 曲面の超越格子および超特異還元格子を調べた。応用として、数論的ザリスキペアの例を構成した。単純 6 次曲線に対し Z-分裂曲線という概念を導入し、分類を与えた。

⑤ 吉岡は偏極 K3 曲面の Fourier-Mukai 双対性を示した。

(3) その他の成果 :

① 菅野は位相的ゲージ理論により計算されるインスタントンの数え上げの母関数 (Nekrasov の分配関数) について、位相的弦理論で開発された位相頂点理論との関係を用いて、その組み合わせ論・表現論的性質を明らかにした。

② 庄司は有限簡約群の既約指標を指標層の特性関数を使って明示的に表示する際に現れるスカラーの決定が重要な問題である。標数 2 の古典群については、今まで全く手段がなかったが、標数 2 の Symplectic 群の場合に、有限体上の対称空間の理論を用いてこのスカラーを決定した。

③ 伊藤は 3-4 次元以上の有限群による商特異点のクレパントな特異点解消を、グレブナー基底を用いて構成する方法、また、G-ヒルベルトスキームとして構成されるクレパントな特異点解消を用いたマツカイ対応について、部分的な成果を得た。

④ 藤野は極小モデル理論の枠組みを拡張することに成功した。その結果、極小モデル理論の基本定理に関してほぼ完璧な定式化が得られた。

⑤ 小木曾は底空間が射影空間である射影的超ケーラー多様体に付随する abelian fibration のスキームの意味での generic fiber の Picard 数は 1 であることを示し、Mordell-Weil 群への応用を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 76 件)

1. M. Artebani, S. Kondo, The moduli of curves of genus 6 and K3 surfaces, Trans. Amer. Math. Soc., (to appear), 査読有り.

2. T. Shoji, K. Wada, Cyclotomic q -Schur algebras associated to the Ariki-Koike algebra, Representation Theory (to appear), 査読有り.

3. I. Shimada, Lattice Zariski k -ples of plane sextic curves and Z -splitting curves for double plane sextics, Michigan Math. J. (to appear), 査読有り.

4. I. Shimada, Generalized Zariski-van Kampen theorem and its application to Grassmannian dual varieties, Internat. J. Math. (to appear), 査読有り.

5. O. Fujino, Non-vanishing theorem for log canonical pairs, Journal of Algebraic Geometry (to appear), 査読有り.

6. H. Nakajima and K. Yoshioka: Perverse coherent sheaves on blow-up. II. wall-crossing and Betti numbers formula, J. Algebraic Geom. to appear, 査読有り.

7. T. Shoji, K. Wada, Product formulas for the cyclotomic v -Schur algebra and for the canonical bases of the Fock space, J. Algebra, 321(2009), no. 11, 3527–3549, 査読有り.

8. H. Awata, H. Kanno, Quiver matrix model and topological partition function in six dimensions, JHEP, vol. 07 (2009) 076, 査読有り.

9. H. Kanno, Instanton Counting and the Chiral Ring Relations in Supersymmetric Gauge Theories, Adv. Stud. Pure Math. vol. 55 (2009) 51–67, 査読有り.

10. H. Awata, H. Kanno, Refined BPS state counting from Nekrasov's formula and Macdonald functions, Int. J. Mod. Phys., vol. A24, No. 12(2009)2253–2306, 査読有り.

11. S. Mukai, H. Nasu, Obstructions to deforming curves on a threefold, I, J. Alg. Geom., vol. 18, 691–709(2009), 査読有り.

12. O. Fujino, Effective base point free theorem for log canonical pairs---Kollar type theorem, Tohoku Math. J. 61 (2009), 475–481, 査読あり.

13. I. Shimada, Transcendental lattices and supersingular reduction lattices of a singular K3 surface, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 361, 909–949 (2009), 査読有り.

14. Lee, Nam-Hoon, K. Oguiso, Connecting certain rigid birational non-homeomorphic Calabi-Yau threefolds via Hilbert scheme, Comm. Anal. Geom. 17(2009), no. 2, 283–303, 査読有り.

15. K. Oguiso, Picard number of the generic fiber of an abelian fibered hyperkaehler manifold, Math. Ann., vol. 344, 929–937 (2009), 査読有り.

16. K. Yoshioka, Fourier-Mukai transform on abelian surfaces, Math. Ann. 345(2009), no. 3, 493–524. 査読あり.

17. K. Yoshioka, Stability and the Fourier-Mukai transform, II, Compositio Math., 145(2009), no. 1, 112–142, 査読あり.

18. H. Kanno and S. Moriyama, Instanton Calculus and Loop Operator in Supersymmetric Gauge Theory, Phys. Rev. D77 (2008) 126001, 査読有り.

19. S. Fujii, H. Kanno, S. Moriyama, S. Okada, Instanton Calculus and Chiral One-point Functions in Supersymmetric Gauge Theories, Adv. Theor. Math. Phys., vol. 12 (2008) 1401–1428, 査読有り.

20. K. Oguiso, Bimeromorphic automorphism groups of non-projective hyperkaehler manifolds---a note inspired by C. T. McMullen. J. Differential Geom. 78 (2008), no. 1, 163–191, 査読有り.

21. K. Oguiso, Mordell-Weil groups of a hyperkaehler manifold--a question of F. Campana, Publ. Res. Inst. Math. Sci., vol. 44, 495--506 (2008), 査読有り.

22. S. Kondo, The moduli space of 8 points on \mathbb{P}^1 and automorphic forms, Contemporary Math. AMS., vol. 422, 89--106 (2007), 査読有り.

23. S. Kondo, The moduli space of 5 points on \mathbb{P}^1 and K3 surfaces, Progress in Math., vol. 260, 189--206 (2007), Birkhauser, 査読有り.

24. I. Shimada, De-Qi Zhang, On Kummer type construction of supersingular K3 surfaces in characteristic 2, Pacific J. Math., vol. 232, 379--400 (2007), 査読有り.

25. K. Oguiso, Automorphisms of hyperkaehler manifolds in the view of topological entropy. Algebraic geometry, 173--185, Contemp. Math., 422,

Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. 査読あり.

26. S. Kondo, Maximal subgroups of the Mathieu group M_{23} and symplectic automorphisms of supersingular K3 surfaces, Int. Math. Res. Not., vol. 2006, 1--9, (2006) 査読有り.
27. H. Kanno, Universal Character and Large N Factorization in Topological Gauge/String Theory, Nucl. Phys. Vol. B745 [PM] (2006) 165-175, 査読有り.
28. S. Mukai, Polarized K3 surfaces of genus thirteen, Adv. Stud. Pure Math., vol. 45, 315-326 (2006), 査読有り.
29. K. Oguiso, Tits alternative in hyperkahler manifolds. Math. Res. Lett. 13 (2006), no. 2-3, 307--316. 査読あり.

[学会発表] (計 157 件)

1. I. Shimada, Transcendental lattices of complex algebraic surfaces, Tohoku-Fudan joint symposium on algebraic geometry, 2009年12月25日, Tohoku Univ.
2. H. Kanno, Combinatorics and Instanton Partition Function in Higher Dimensions, 滞在型国際研究集会 Branes, Strings and Black Holes, 2009年10月28日, 京都大学基礎物理学研究所
3. S. Kondo, The moduli spaces of Enriques, Coble surfaces and automorphic forms, Lie algebras, vertex algebras and automorphic forms (ICMS, Edinburgh, UK), 2009年8月31日-9月4日.
4. I. Shimada, On lattice theoretic invariants of curves on a surface, The 2nd MSJ-SI Arrangements of Hyperplanes, 2009年8月12日, Hokkaido Univ., Sapporo.
5. S. Mukai, Non-abelian Brill-Noether loci of curves and application to the unirationality of moduli of K3 surfaces, "Moduli", Humboldt Univ., Berlin, Germany, 2009年8月28日.
6. S. Kondo, K3 surfaces and the Leech lattice, Algebraic surfaces and related topics (POSTECH in Pohang, Korea), 2009年8月21日.
7. S. Kondo, Moduli of plane quartics, Goepel invariants and Borcherds products, Moduli and Discrete Groups (RIMS, Kyoto Univ., 京都), 2009年6月10日.
8. I. Shimada, On equisingular families of plane curves of degree 6, Arithmetic and Algebraic Geometry Related to Moduli Spaces, 2009年1月19日, Univ. of Tokyo.
9. S. Kondo, Uniformizations for the moduli of curves of genus 3, 4 and 6, Workshop on moduli spaces (Sogan Univ., Korea), 2009年1月7日.
10. O. Fujino, 極小モデル理論と消滅定理, 日本数学会 2008 年秋季総合分科会特別講演, 2008年9月25日 東京工業大学.
11. Y. Ito, Existence of crepant resolutions, COE COW Tokyo conference, 東京大学, 2008年12月18日.
12. Y. Ito, Existence of crepant resolutions, WAG Concluding Conference, ウォーリック大学, イギリス, 2008年7月23日.
13. S. Kondo, Non-symplectic automorphisms of K3 surfaces and ball quotients, Active period on Moduli June-July 2008 (Univ. of Warwick, UK), 2008年7月7日-11日.
14. H. Kanno, Duality, branes and the geometric Langlands program (after Kapustin-Witten), 国際研究集会 Noncommutative Geometry and Physics 2008 --K-theory and D-Brane--2008年2月18日 -- 2月22日, 神奈川県葉山町湘南国際村センター.
15. Y. Ito, The existence of crepant resolutions, Mathematics and Physics seminar, ペンシルバニア大学, アメリカ合衆国, 2008年2月29日.
16. S. Mukai, Cohomologically trivial involutions of Enriques surfaces and Shioda-Inose correspondence, Algebraic Geometry, Lorentz Center, Leiden, the Netherland, 2008年7月2日.
17. H. Kanno, Refined Instanton Counting and Macdonald functions, 国際研究集会 Progress of String Theory and Quantum Field Theory, 2007年12月7日 -- 12月10日, 大阪市立大学学術情報センター.
18. I. Shimada, Non-homeomorphic conjugate complex varieties Singularities in Geometry and Topology, Fourth Franco-Japanese Symposium on Singularities, 2007年8月30日, Tateyama Kokusai Hotel, Toyama.
19. K. Yoshioka, Stability and the Fourier-Mukai transform, Workshop: Non-linear integral transforms: Fourier-Mukai and Nahm, Centre de recherches mathematiques, 8/27--8/31, 2007.
20. S. Kondo, The moduli of plane quartics, Goepel invariants and Borcherds products, 代数学シンポジウム (神戸大学), 2007年8月8日.
21. O. Fujino, Recent developments in the log minimal model program II, 代数学シンポジウム, 2007年8月8日, 神戸大学.
22. S. Kondo, The moduli of plane quartics

and Borchers products, Moduli spaces, Satellite meeting for festival dedicated to 300th birthday of Leonhard Euler, (Euler Inst., Saint-Petersburg, Russia), 2007年7月2日-6日.

23. T. Shoji, Lusztig's conjecture for finite classical groups of characteristic 2, Oberwolfach meeting on Algebraic Groups, (Germany), 2007年4月24日.

24. K. Yoshioka, 代数曲面上のベクトル束のモジュライ空間, 日本数学会 2007年度年会・代数学分科会特別講演, 埼玉大学, 2007年3月27日--3月30日

25. Y. Ito, Minimal resolution via Groebner bases, 研究集会「計算可換代数と計算代数幾何」, 京大数理研, 2007年1月17日.

26. S. Mukai, Hilbert's 14th problem and Verlinde type formulas for rings of invariant polynomials, Kuwait lecture, Cambridge Univ., England, 2007年1月30日.

27. S. Kondo, The moduli space of 8 points on the projective line and automorphic forms, Modular Forms, (Schiermonnikoog, Netherlands), 2006年10月9日-13日.

28. H. Kanno, Instanton calculus and chiral ring relations in supersymmetric gauge theories, MSJ-IHES Joint Workshop on Non-commutativity, 2006年11月18日, IHES, Bures-sur-Yvette, France.

29. H. Kanno, Topological strings on local Calabi-Yau manifolds and instantons in gauge theories, LMS Durham Symposium: Methods of Integrable Systems in Geometry, 2006年8月11日--21日, University of Durham, UK.

30. S. Mukai, A generalization of Mumford's example (joint work with H. Nasu), "Classical Algebraic Geometry", Oberwolfach, 2006年6月14日.

[図書] (計3件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金銅 誠之 (Shigeyuki Kondo)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 50186847

(2) 研究分担者

庄司 俊明 (Toshiaki Shoji)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 40120191

(3) 研究分担者

菅野 浩明 (Kanno Hiroaki)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 90211870

(4) 研究分担者

伊藤 由佳理 (Ito Yukari)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号: 70285089

(5) 連携研究者

向井 茂 (Mukai Shigeru)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号: 80115641

(6) 連携研究者

藤野 修 (Fujino Osamu)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 60324711

(7) 連携研究者

島田 伊知朗 (Shimada Ichiro)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 10235616

(8) 連携研究者

小木曾 啓示 (Oguiso Keiji)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 40224133

(9) 連携研究者

吉岡 康太 (Yoshioka Kota)
神戸大学・大学院理学部・教授
研究者番号: 40274047