

機関番号：12601

研究種目：基盤研究 (A)

研究期間：2006～2009

課題番号：18204002

研究課題名 (和文)

リーマン面に関連する位相幾何学

研究課題名 (英文)

Topological Studies around Riemann Surfaces

研究代表者

河澄 響矢 (KAWAZUMI NARIYA)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：30214646

研究成果の概要 (和文)：

ベネ、ペナー両氏との共同研究で、リーマン面の組み合わせ構造を写像類群の代数的な構造に直接結びつける道具である、ファットグラフ・マグナス展開を発見した。リーマン面の新しい解析的不変量を発見し、それを用いてリーマン面のモジュライ空間の「曲がり具合」を記述した。久野雄介氏との共同研究で、リーマン面の交叉形式の二つの精密化であるゴールドマン・リー代数と斜交的導分のリー代数を結びつける新しい方法を発見し、応用として、非可換ピカール・レフシェッツ公式を証明した。

研究成果の概要 (英文)：

Bene, Penner and the principal investigator discovered fatgraph Magnus expansions, which connects a combinatorial structure of a Riemann surface directly to some algebraic aspects of the mapping class groups. The principal investigator also discovered a new analytic invariant of a closed Riemann surface to describe how curved the moduli space of Riemann surfaces is. Kuno and the principal investigator discovered a new connection between two refinements of the intersection form on a Riemann surfaces, the Goldman Lie algebras and the Lie algebras of symplectic derivations. As an application, they proved a non-commutative analogue of the Picard-Lefschetz formula.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	6,700,000	2,010,000	8,710,000
2007年度	6,100,000	1,830,000	7,930,000
2008年度	6,200,000	1,860,000	8,060,000
2009年度	6,200,000	1,860,000	8,060,000
総計	25,200,000	7,560,000	32,760,000

研究分野：位相幾何学、リーマン面。

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：リーマン面、写像類群、モジュライ空間、マグナス展開、アラケロフ・グリーン関数、ゴールドマン・リー代数、非可換ピカール・レフシェッツ公式。

1. 研究開始当初の背景

(1) マグナス展開について

代表者は、ねじれ係数森田マンフォード類を表すコサイクルおよびその高次の関係式を

与えるコチェインを具体的に構成するために、条件を必要最小限に絞って、自由群のスタンダードなマグナス展開を一般化していた。複素構造、組み合わせ構造、基本群の生成系など付加的な構造を2次元曲面に与え

ることではじめて「カノニカル」な（一般化された）マグナス展開が得られるのである。すでに発見していた複素構造から決まるマグナス展開つまり調和的マグナス展開をより深く研究すること、および他の付加的構造から別の種類の「カノニカル」なマグナス展開を構成することが課題であった。

(2) 調和的マグナス展開によるリーマン面のモジュライ空間の幾何学

リーマン面のモジュライ空間の微分幾何学としてはリーマン面の双曲構造から誘導されるヴェイユ・ピーターソン計量によるものがほとんどであったし、現在でもそうである。しかし、たとえば超楕円曲線の全体の上ではすべての森田マンフォード類は消えるのであるが、このことはヴェイユ・ピーターソン計量からは分からない。つまり、リーマン面の個性を反映した計量であるとは考えにくい。リーマン面の個性を反映したモジュライ空間上の構成物としては B. ハリスによる（点付き）調和体積や関連して Hain-Reed 函数などがあつた。他方、アラケロフ幾何からは Faltings delta 不変量があつた。

点付き調和体積の第一変分はリーマン面の普遍族の相対接束に標準的な第一チャーン形式を定義する。一方、アラケロフ・グリーン函数は同じ相対接束に計量を定める。二種類の「標準的」微分形式の解析的「差」を明らかにすること、具体的には、この差を Hain-Reed 函数および Faltings delta 不変量などのモジュライ空間上の既存の実数値函数と関係づけることが代表者にとって10年以上にわたる積年の課題であつた。その過程で調和的マグナス展開が得られ、本研究課題につながつた。それに伴つて、写像類群のジョンソン準同型像の評価に調和的マグナス展開を応用することを目指していた。

(3) ノヴィコフ-フェイギン予想

S. ノヴィコフ と B. フェイギンは複素代数曲線の有理型ベクトル場のリー代数のコホモロジーについて予想をたてており、代表者はそのことを知らずに1993年にその予想の複素解析版を証明していた。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は大きく言えば、リーマン面のモジュライ空間について、一般論と具体例そしてトポロジーと複素解析の交わる場所で新しい幾何学を構築することであつた。そのための我々にとっての手がかりになるのがマグナス展開であり、複素解析的ゲルファント・フクス・コホモロジーであつた。具体的には以下の通り。

- (1) 新しいマグナス展開の構成。
- (2) 調和的マグナス展開の研究。
- (3) ノヴィコフ-フェイギン予想。

(4) 写像類群のコホモロジーの具体的計算。

3. 研究の方法

(1) 新しいマグナス展開の構成。

森田茂之氏と R. ペナー氏によって、タイヒミュラー空間の組み合わせ構造に由来し、第一ジョンソン写像を代表するコサイクルが発見された。本研究課題が共催した国際集会「微分同相群 2006」においてペナー氏と代表者の共同研究が開始され、かねてからのペナー氏とベネ氏の共同研究と統合する形で、三価ファットグラフに随伴するマグナス展開の発見と、それらから誘導されるジョンソン写像の具体的表示が得られた。その後の展開は 4. において述べる。なお、本課題の研究期間中に発表された G. マッシュヨー氏のプレプリント arXiv: 0809.4629 における斜交的マグナス展開の概念の導入はマグナス展開の理論に大きな転機を齎した。

(2) 調和的マグナス展開の研究。

当初、具体的なリーマン面についての調和的マグナス展開を計算を試みたが、グリーン作用素が妨げとなつてうまく行かなかつた。そこで、一般的な計算をすることにして、以前行つたモジュライ空間上の不変曲線の相対接束の曲率形式の計算を再検討するうちに、閉リーマン面の新しい解析的不変量に到達した。

(3) ノヴィコフ-フェイギン予想。

意味のある進展がなかつたことは慚愧にたえない。

(4) 2009年11月に当時代表者が指導する大学院生であつた久野雄介氏（現：広島大理・学振PD）が、斜交的マグナス展開の定める第一ジョンソン写像のデーニツイストにおける値を表す公式を得た。これが代表者によるマグナス展開の理論に深く関わっていることに気づき、公式の高次化を目指して共同研究をはじめた。本研究課題の最終年度であつたが、繰越して研究期間を12ヶ月延長した。延長期間内に最終的な結果およびチャス・サリヴァン予想への応用がえられ、オーベルヴォルフアッハ数学研究所、オーフス大学モジュライ量子幾何学センターを含む幾つかの場所で成果発表を行つた。

(5) 研究集会について：関連分野の以下の研究集会を、リーマン面に関連する位相幾何学の研究交流および成果発表の立場から共催または主催した。

「第3回『トポロジー・代数幾何蔵王セミナー』（2006年7月、於：蔵王ハイツ）、「微分同相群 2006」（2006年9月、於：東大数理）および「複素解析葉層集会」（2007年2月、於：龍谷大学）、「Algebras, Groups and Geometries in Tambara」（2007年9月、於：東京大学玉原国際セミナーハウス）、

「Workshop on linear representations of the mapping class group and related topics」(2007年12月, 於: 国民宿舎 桂浜荘)、
「Hodge 理論, 退化, 特異点の代数幾何とトポロジー研究集会」(2008年3月, 於: 東北学院大学工学部)、
「Workshop on Geometry and Topology of Mapping class groups」(2008年11月, 於: あきた白神体験センター)、
「微分・代数トポロジーの現在と未来」(2009年11月, 於: かんぼの宿徳島)、
「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」(2009年12月, 於: 龍谷大学セミナーハウスともいき荘)。

(6) 特任研究員(学術研究支援員)について: 研究支援にとどまらず、リーマン面研究ネットワークの形成を目指す観点から、2007年度に1名学術研究支援員を雇用し、2008年度から2010年度(繰越)まで毎年2名ずつ特任研究員を雇用した。

4. 研究成果

本研究課題の主たる成果は次の三点である。

(1) ファットグラフ・マグナス展開の発見。
(2) リーマン面のモジュライ空間上の、調和的マグナス展開に関連した新しい実数値関数の発見。

(3) ゴールドマン・リー代数から斜交的導分のリー代数へのよい準同型の発見とその応用。

(1) R. ペナー氏、A. ベネ氏と代表者との共同研究によって、三価ファットグラフの構造から自然に定まるマグナス展開を具体的に発見した。さらに、ここからえられるすべての次数のジョンソン写像をトレリ亜群の上で具体的に記述することができた。その第一項は、森田・ペナー・コサイクルに一致する。第二項以上はまったく新しいジョンソン写像の表示を与えている。以上の結果についてを論文 *Adv. Math.*, 221(2009) 627–659. として発表した。

しかしながら、このマグナス展開は Massuyeau の意味で斜交的ではない。ファットグラフにともなう新たな斜交的マグナス展開の構成を目指して研究を行ったが、2009年度後半まで成果は得られなかった。事態が動いたのは(3)に述べる久野雄介氏との共同研究による。この共同研究の途上で久野氏 *arXiv: 1009.2219, to appear in: Proc. Amer. Math. Soc.*, は組合せ的な斜交的マグナス展開を発見した。彼のアイデアを組み込むことで、R. ペナー氏、A. ベネ氏、久野氏と代表者との共同研究によって三価ファットグラフの構造から自然に定まる斜交的マグナス展開が具体的に構成できた。しかし、随伴するジョンソン写像の計算にまでは至っていない。

なお、斜交的マグナス展開の空間を考えると、その空間の上でねじれ係数森田マンフォード類を表す微分形式たちが、実安定曲線のモジュライ空間によってパラメライズされることが分かった。また、長さ付き有限グラフのマグナス展開を構成した。

(2) 本研究課題によって、リーマン面のモジュライ空間の上に新たな具体的な実数値関数であって、二種類の「標準的」微分形式の解析的「差」を与えるものを構成することができた。さらにこの実数値関数の第二変分を計算した。付随して、アラケロフ・グリーン関数の定める第一チェーン形式を調和的マグナス展開の言葉で記述する(以前得られていた)公式の別証も得られた。以上の結果をプレプリント 'Johnson's homomorphisms and the Arakelov-Green function', *arXiv:0801.4218* としてまとめた。

このプレプリントを受けて Robin de Jong (*arXiv: 1002.1618, to appear in: Amer. J. Math.*) は、我々の関数が S.W. Zhang (*arXiv: 0812.0371, Invent. Math.* 179(2010), 1-73) が代表者より10ヶ月遅れで発見した数論的不変量と一致することを発見し、代表者の計算結果を基礎として、我々の関数と Hain-Reed 関数および Faltings delta 不変量の三者が線型従属にあることを示した。これでこの問題に完全に決着がついた。リーマン面のモジュライ空間の一般理論と個別研究の相互作用から生まれる幾何学を構築するという本研究課題の目標は一定程度果たされたと考える。

なお、調和的マグナス展開の第一変分の上で森田トレースを計算したが、予想に反して消滅しなかった。そのため写像類群のジョンソン準同型像の評価に調和的マグナス展開を使用することは、簡単とは言えなくなってしまう。

(3) 久野雄介氏(広島大理・学振PD)との共同研究により、全ジョンソン写像のデーンツイストでの値を明示的に表す公式を証明した(プレプリント 'The logarithms of Dehn twists' *arXiv: 1008.5017*)。これは古典的なピカール・レフシェッツ公式の非可換な一般化であって森田によるジョンソン準同型の計算を含んでいる。本研究課題の最終目標の一つである全ジョンソン写像の解明に一定の手がかりが得られた。証明にともなって、ゴールドマン・リー代数とシンプレクティック導分のリー代数について新知見を得た。後者は Kontsevich の形式的シンプレクティック幾何を通してリーマン面のモジュライ空間のコホモロジーを記述している。我々は境界成分1のコンパクト曲面のゴールドマン・リー代数からシンプレクティック導分のリー代数への準同型であって核の次元が1

で像が稠密なものが斜交的マグナス展開から構成できることを発見した。ストリング・トポロジーとシンプレクティック導分の密接な繋がりが本研究によって始めて明らかになったと言っても過言ではない。この準同型のもう一つの応用として、久野氏との共同研究によって、無限種数でエンドが1つの曲面のゴールドマン・リー代数の中心が自明ループで張られることを示した(プレプリント 'The Chas-Sullivan conjecture for a surface of infinite genus', arXiv: 1009.4985)。閉曲面のゴールドマン・リー代数についての類似の結果は Chas と Sullivan が予想し Etingof が解決している。ゴールドマン・リー代数とシンプレクティック導分に関して他にもいくつか部分的な結果が得られているが、まだ発表できる段階にはない。しかし、以上の研究によって無限次元リー代数によるリーマン面の位相幾何学的研究という新局面が展開されつつある。今後、別の研究課題の下で完成を期したい。なお、本項の成果は予定研究期間終了後の繰越期間に得られた。繰越制度の具体的な恩恵である。

(4) Novikov-Feigin 予想については、非自明な進展がなかった。申し訳なく思っている。

(5) その他の成果

1, 写像類群の巡回部分群上の整係数リーマン・ロッホ公式についての分担者秋田と代表者の共同研究を完成させ、論文 Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 144(2008), 411-421 として発表した。

2, ねじれ係数森田マンフォード類の組み紐群への制限についての以前の計算を整理し、自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーについての(予想とまではいかないが)「期待」を新たに提出した論文 Advanced Studies in Pure Mathematics (Groups of Diffeomorphisms), 52 (2008) 383-400 を発表した。この論文を受けて最近、「期待」の半分が O. Randal-Williams arXiv: 1012.1433 によって証明された。

3, ねじれ係数森田マンフォード類をリフトして写像類群の新じいねじれ係数コホモロジー類を導入した。当時代表者が指導していた大学院生の佐藤正寿氏との共同研究で、そのうち1次元のものについて係数を還元してジョンソン核の自明係数コホモロジーにしたものを計算した。しかしながらこれは消滅してしまい望む成果は得られなかった。まだ証明できていないが、この新しいコホモロジー類の1次元のものがすべての次数のジョンソン準同型の森田による精密化を含んでいる可能性が濃厚にある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① Nariya Kawazumi: Canonical 2-forms on the moduli space of Riemann surfaces, 'Handbook of Teichmüller theory', edited by A. Papadopoulos, Volume II, EMS Publishing House, Zurich, 2009, pp. 217--237. 査読無
- ② Alex Bene, Nariya Kawazumi and Robert Penner: Canonical lifts of the Johnson homomorphisms to the Torelli groupoid, Adv. Math., **221**(2009) 627--659. 査読有
- ③ Nariya Kawazumi: On the stable cohomology algebra of extended mapping class groups for surfaces, Advanced Studies in Pure Mathematics (Groups of Diffeomorphisms), **52** (2008) 383--400. 査読有
- ④ Toshiyuki Akita and Nariya Kawazumi: Integral Riemann-Roch formulae for cyclic subgroups of mapping class groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **144**(2008), 411--421. 査読有
- ⑤ Nariya Kawazumi: Twisted Morita-Mumford classes on braid groups, Geometry & Topology Monographs **13**(2008), 293--306. 査読有
- ⑥ Nariya Kawazumi: A higher analogue of the period matrix of a compact Riemann surface, Oberwolfach Reports 3-2, 1555-1557 (2006), 査読無
- ⑦ Nariya Kawazumi: Harmonic Magnus Expansion on the Universal Family of Riemann Surfaces, Oberwolfach Reports 3-1. 770-772 (2006), 査読無

[学会発表] (計13件)

- ① 河澄響矢, The logarithms of Dehn twists, 「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2011」, 2011年3月10日, 首都大学東京 南大沢キャンパス.
- ② Nariya Kawazumi, On the Turaev cobracket on the Lie algebra of symplectic derivations, Seminar at QGM (Center for Quantum Geometry of Moduli Spaces), 2011年1月26日, University of Aarhus (デンマーク).
- ③ 河澄響矢, The Chas-Sullivan conjecture for a surface of infinite genus, 研究集会「トポロジーの現在と未来」, 2010年12月21日, 文部科学省共済組合箱根宿泊所.
- ④ 河澄響矢, The logarithms of Dehn twists, 大阪大学大学院理学研究科数学教室談話会,

2010年12月13日, 大阪大学大学院理学研究科数学専攻.

⑤ Nariya Kawazumi, The logarithms of Dehn twists, Workshop `Teichmüller Theory,' 2010年12月3日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. (ドイツ)

⑥ Nariya Kawazumi, The Goldman Lie algebra and Kontsevich's associative symplectic geometry, Seminar at QGM (Center for Quantum Geometry of Moduli Spaces), 2010年9月28日, University of Aarhus (デンマーク).

⑦ 久野雄介、河澄響矢, The logarithms of Dehn twists, 日本数学会秋季分科会一般講演, 2010年9月22日, 名古屋大学.

⑧ 河澄響矢, Johnson's homomorphisms and the Arakelov-Green function, 研究集会「離散群と双曲空間の解析学とトポロジー」, 2007年12月12日, 京都大学数理解析研究所.

⑨ 河澄響矢, 実および複素一次元のゲルファントフクスコホモロジー, 研究集会「複素微分方程式の定性的理論と関連する幾何」, 2007年6月29日, 東京大学大学院数理科学研究科.

⑩ Nariya Kawazumi, A higher analogue of the period matrix of a compact Riemann surface, Topology Seminar, CTQM, 2006年11月7日, University of Aarhus (デンマーク)..

⑪ 河澄響矢, A higher analogue of the period matrix of a compact Riemann surface, Workshop `Groups of Diffeomorphisms 2006,' 2006年9月11日, 東京大学大学院数理科学研究科.

⑫ 河澄響矢, 第一森田マンフォード類を表すいろいろな微分形式について, 「第3回トポロジー・代数幾何蔵王セミナー」2006年7月27日, 蔵王ハイツ.

⑬ Nariya Kawazumi, A higher analogue of the period matrix of a compact Riemann surface, Workshop `Teichmüller Space (Classical and Quantum),' 2006年5月30日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. (ドイツ)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河澄 響矢 (KAWAZUMI NARIYA)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 30214646

(2) 研究分担者

松本 幸夫 (MATSUMOTO YUKIO)
学習院大学・理学部・教授
研究者番号: 20011637

(H18→H19: 連携研究者)

森田 茂之 (MORITA SHIGEYUKI)
東京大学・大学院数理科学研究科・名誉教授
研究者番号: 70011674

(H18→H22)

橋本 義武 (HASHIMOTO YOSHITAKE)
東京都市大学・知識工学部・教授
研究者番号: 20271182

(H18→H19: 連携研究者)

澁川 陽一 (SHIBUKAWA YOUICHI)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 90241299

(H18→H19: 連携研究者)

秋田 利之 (AKITA TOSHIYUKI)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 30279252

(H18→H19: 連携研究者)

遠藤 久顕 (ENDO HISAAKI)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 20323777

(H18→H19: 連携研究者)

足助 太郎 (ASUKE TARO)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 76543210

田所 勇樹 (TADOKORO YUUKI)
木更津工業高等専門学校・基礎学系・准教授
研究者番号: 10535414

(H19: 連携研究者)

(3) 連携研究者