

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2006～2009

課題番号：18204003

研究課題名（和文） GIT安定性と標準ケーラー計量

研究課題名（英文） GIT stability and canonical Kähler metrics

研究代表者

二木 昭人 (FUTAKI AKITO)

東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：90143247

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何

1. 研究計画の概要

幾何学的対象のモデュライ空間を記述する方法として、その対象を微分幾何学的対象に置き換えて研究することはしばしば取られるアプローチである。リーマン面のモデュライ空間を定曲率計量や調和写像のモデュライ空間に置き換えて研究するのは、その典型的例である。もしこのようなアプローチが成功するならば、問題としている幾何学的対象のモデュライ空間はハウスドルフ性やいいコンパクト化をもつなどのいい性質をもつことが予想される。一方、マンフォードの幾何学的不変式論は群軌道に関し半安定なもの全体はハウスドルフ性やいいコンパクト化をもつなどのいい性質を持つということを主張している。そこで「微分幾何学的対象で記述できるモデュライ空間は幾何学的不変式論の意味の安定・半安定なもの全体と一致する」という仮説をたてることにする。本研究の主目的は端的ケーラー計量、特にケーラー・アインシュタイン計量、定スカラー曲率ケーラー計量を持つ複素多様体を幾何学的不変式論の意味の安定性でもって特徴づけることによりこの仮説を実証することである。幾何学的不変式論の議論に乗るような安定性の定義を与え、多様体はその意味での安定性を持つことがケーラー・アインシュタイン計量などの良い計量をもつための必要十分条件であることを示すことである。

2. 研究の進捗状況

ケーラー幾何の研究の一つの応用として、トーリック佐々木・アインシュタイン計量の存在問題に完全な解決を与えた。トーリックでない場合は、ケーラーの場合と同様に、安

定性の概念が関連して来る。佐々木多様体の幾何とケーラー多様体の幾何は今後、一緒に土俵で考察すべきであると考えている。

次に、K安定性が、ケーラー・アインシュタイン計量が存在するための必要十分条件であることを示すために、乗数イデアル層を用いるのが有効であると考えている。佐野友二氏との共同研究で、二木不変量と乗数イデアル層とどのような関係があるかを調べた。これを用いると、乗数イデアル層がK安定性を崩す状況がよく理解できる。これを精密化、ないし抽象化することにより、最終解決にたどり着けると期待される。

スカラー曲率一定計量の存在と漸近的チャウ安定性との関係はドナルドソン、満洲俊樹により得られている。満洲結果は漸近的半安定性の障害が消えているという仮定の下で得られたものである。当該研究者は、満洲の障害は次元と同じ個数の積分不変量が消えることと同値であることを示している。最近、小野肇と佐野友二との共同研究でこれらの積分不変量は、トーリック Fano 多様体の場合、ヒルベルトシリーズの微分として得られることを示し、具体例に対する計算を実行した。その結果、これ等の張る空間は一般には2次元以上であることを示した。

3. 現在までの達成度

現在までのところ、目標はおおむね達成されている。K安定性とケーラー・アインシュタイン計量の存在を証明することは、問題の深さと難しさから、遠いもののように思っていたが、案外手の届くところにあるように思える。

4. 今後の研究の推進方策

乗数イデアル層を決める complex singularity exponent を込みにした slope 安定性を考えることにより, 乗数イデアル層が現れるならば K 安定でないことを示せば, 完全解決にいたるので, その方向で夢を追いたい.

また, 佐々木・アインシュタイン計量の存在の応用として shrinking gradient soliton の構成を考察しているが, 色々な用事のため, 途中でやりかけのままになっている. 最後までやり遂げたい.

局所共形ケーラー多様体の一種に Vaisman 多様体というものがあり, これは佐々木・アインシュタイン計量のケーラー錘とほぼ同じものであるようである. この事情を詳細に調べてみたい.

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Akito Futaki, Hajime Ono and Guofang Wang, Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, to appear in Journal of Differential Geometry. 査読有り. 査読有り.
- ② Akito Futaki and Hajime Ono, Einstein metrics and GIT stability, to appear in Sugaku Expositions. Translated from Sugaku, 60(2008), 175--202 in Japanese. 査読有り.
- ③ Koji Cho, Akito Futaki and Hajime Ono, Uniqueness and examples of toric Sasaki-Einstein manifolds, Comm. Math. Phys., 277 (2008), 439-458. 査読有り.
- ④ Akito Futaki, Holomorphic vector fields and perturbed extremal Kähler metrics, J. Symplectic Geom., Vol. 6, No. 2 (2008), 127-138. 査読有り.
- ⑤ Akito Futaki, Toric Sasaki-Einstein geometry, Proceedings of 4-th International Congress of Chinese Mathematicians, Hangzhou 2007, (eds. L. Ji et al), Vol. 1, 102-119, Higher Education Press, Beijing, (2008). 査読有り.
- ⑥ Akito Futaki, Harmonic total Chern forms and stability, Kodai Math. J. Vol. 29, No. 3 (2006), 346-369. 査読有り.

[学会発表] (計 3 件)

- ① Einstein 計量と GIT 安定性, 2008年3月24日, 日本数学会年会, 企画特別講演, 近畿大学.

- ② 乗数イデアル層と積分不変量, 2008年3月22日-25日, 日本数学会年会, 一般講演, (佐野友二との共同研究), 近畿大学.

- ③ Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, 日本数学会, 一般講演 (小野肇, 佐野友二との共同研究), 東京大学, 2009年3月26日-3月29日.