

平成22年 5月26日現在

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2006～2009

課題番号：18204004

研究課題名（和文） 3次元多様体の幾何と不変量

研究課題名（英文） Geometry and Invariants of 3-manifolds

研究代表者

小島 定吉 (KOJIMA SADAYOSHI)

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：90117705

研究成果の概要（和文）：

3次元多様体のトポロジーの理解を深めることを目的とし、幾何構造と不変量の関わりについての研究を進め、幾何学的不変量の大域的な振る舞いについていくつかの新しい知見を得た。とくに代表者は、曲面の写像類の力学系的不変量とその写像トーラスの単体体積の比較可能性に関する研究で成果を得た。また総括のため最終年度に国際研究集会を開催し、本研究の今後の方向性を示唆する重要な課題を数多く指摘した。

研究成果の概要（英文）：

We have studied the interaction between geometric structures and invariants of 3-manifolds in order to get deeper understanding for their topology, and obtained several new results on global behavior of geometric invariants. In particular, the reporter attained a few progress on comparison of dynamical invariants of mapping classes of a surface and simplicial volumes of their mapping tori. Also, we have organized an international conference to review our activities in the last year, and pointed out many issues that suggest further direction.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	5,100,000	1,530,000	6,630,000
2007年度	4,500,000	1,350,000	5,850,000
2008年度	4,700,000	1,410,000	6,110,000
2009年度	8,400,000	2,520,000	10,920,000
年度			
総計	22,700,000	6,810,000	29,510,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何，3次元トポロジー，双曲幾何，幾何構造，位相不変量，体積

## 1. 研究開始当初の背景

2003年に発表され、その後の検証により2006年に世界的に認知されたペレルマンの幾何化予想の証明は、3次元多様体のトポロ

ジーの研究に大きな転機をもたらした。幾何化予想は3次元多様体のトポロジーの分類を可能にし、分野の終焉とも言われたが、実は主張は局所的な範囲に留まっており、大域的

トポロジーを記すには新しい捉え方が必要と考え始められていた。

## 2. 研究の目的

本研究は、ペレルマンによる幾何化予想の解決を前提に、研究組織がカバーできる広範な分野を総動員し、3次元多様体上の幾何と不変量の理解を大域幾何 (global geometry) の観点から深め、3次元多様体の位相同型類を要素とする世界の有機的結びつきを記す鳥瞰図の作成を目指した。この目標は、19世紀半ばには素朴な意味でトポロジーが完全に知られていた曲面の世界が、実はその内部に豊かな構造を秘めており、今日数学内外の諸分野と結びつき華やかな研究が展開されていることに手本にある。

## 3. 研究の方法

数学の研究は1人ではできず、また研究室のような単位でグループを組むのも向いていない。専門の壁を低く設定してできるだけ幅広く意見交換をする環境を整えることが、研究を効果的に進める上で重要である。そのため本研究では、各種関連情報の収集に務めるため、研究組織内外の研究打合せ、国外を含めた研究集会での成果発表、関連研究集会の開催を数多く実施した。

## 4. 研究成果

(1) 曲面の写像類の共役類に対し、その写像トーラスの位相同型類は一意的に決まる。したがってそれぞれの複雑度を素直に測る写像類の共役不変量と写像トーラスの位相不変量には、強い結びつきが期待される。

代表者は金・高沢とともに、2000年に執筆された高沢の学位論文での計算機実験結果をもとに、写像類を擬アノソフ類に限定し、その共役不変量であるエントロピーと、双曲構造をもつ写像トーラスの双曲体積の比較可能性、および最小エントロピーと最小体積を実現する写像類に対する実験的考察をまとめ、論文リスト(15)として出版し、いくつかの研究集会で発表した。

また代表者は、金・高沢との成果の前半部分を擬アノソフとは限らない一般の場合に拡張することを目指し、写像類の力学系的な共役不変量である Teichmüller ノルム (実は一般にエントロピーに等しいことが分かった) および Weil-Petersson ノルムと、写像トーラスの単体体積の比較定理を得、プレプリントとしてまとめた。

(2) 代表者は2000年から水嶋滋および Ser Pew Tan とともにサークルパッキングを許容する射影構造をもつリーマン面のモジュライの研究を始め、論文リスト(33)で一意化との関連を見だし、論文リスト(34)にサーベイを記した。その後、射影幾何の立場に立て

は、Koebe, Andreev, Thurston, Brooks による成果も含め、サークルパッキングと Teichmüller 空間の結びつきに関するこれまでの結果を統一的にまとめられることに気づき、Teichmüller 理論についてのハンドブックの一章として(14)を執筆した。

(3) 研究分担者・連携研究者による研究成果はたいへん多数でまた多岐にわたるため、次項の論文リストにある各々のタイトルによって報告に替える。

(4) 研究成果ではないが、本研究総括の一端として、最終年度に開催した国際研究集会で明確になった今後の重要な課題について、二点記しておく。一つは、3次元多様体のトポロジーのより深い理解のため、共通の有限被覆をもつことで同値とする通約性が中心課題となっているという点である。今一つは、そもそも本研究が目指した空間構造の研究と位相不変量の研究の融合は、端緒にはついたものの、まだ始まったばかりであるという点である。3次元多様体の位相不変量の理解は、本研究の一部も含めさまざまな角度から深められ大きく進んでいるが、そこでは幾何化予想解決によるトポロジー理解が未だに大した貢献をしていない。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 36 件)

(1) D. Calegari and K. Fujiwara, Combable functions, quasimorphisms, and the central limit theorem, to appear in Ergodic Theory and Dynamical Systems, 査読有。

(2) K. Fujiwara and J. F. Manning, CAT(0) and CAT(-1) fillings of hyperbolic manifolds, to appear in Journal of Diff. Geom., 査読有。

(3) R. F. Bass, T. Kumagai and T. Uemura, Convergence of symmetric Markov chains on  $Z^d$ , to appear in Probab. Theory Relat. Fields, 査読有。

(4) Z-Q. Chen and T. Kumagai, A priori Holder estimate, parabolic Harnack principle and heat kernel estimates for diffusions with jumps, to appear in Rev. Mat. Iberoamericana, 査読有。

(5) M. T. Barlow, R. F. Bass, T. Kumagai and A. Teplyaev, Uniqueness of Brownian motion on Sierpinski carpets, to appear in J. European Math. Soc., 査読有。

(6) D. Calegari and K. Fujiwara, Stable commutator length in word-hyperbolic groups, Groups, Geometry, and Dynamics. 4 (2010), 59-90, 査読有。

- (7) P-E. Caprace and K. Fujiwara, Rank one isometries of buildings and quasi-morphisms of Kac-Moody groups, *Geom. and Funct. Anal.*, 19 (2010), 1296-1319, 査読有.
- (8) R. F. Bass, M. Kassmann and T. Kumagai, Symmetric jump processes: localization, heat kernels, and convergence, *Ann. Inst. H. Poincaré - Probabilités et Statistiques*, 46 (2010), 5971, 査読有.
- (9) B. M. Hambly and T. Kumagai, Diffusion on the scaling limit of the critical percolation cluster in the diamond hierarchical lattice, *Comm. Math. Phys.*, 295 (2010), 29-69, 査読有.
- (10) 相馬輝彦, 位相的クライン群論の最近の話題, *数学*, 62 (2010), 18-39, 査読有.
- (11) S. Kiriki, Y. Nishizawa and T. Soma, Heterodimensional tangencies on cycles leading to strange attractors, *Discrete Conti. Dynam. Sys.*, 27 (2010), 285-300, 査読有.
- (12) M. Bestvina and K. Fujiwara, A characterization of higher rank symmetric spaces via bounded cohomology, *Geom. and Funct. Anal.*, 19 (2009), 11-40, 査読有.
- (13) F. Dahmani and K. Fujiwara, Copies of a one-ended group in a Mapping Class Group, *Groups, Geometry, and Dynamics*, 3 (2009), 359-377, 査読有.
- (14) S. Kojima, Circle packings and Teichmüller space, *Handbook of Teichmüller theory, Volume II* (2009), 509-531, 査読有.
- (15) E. Kin, S. Kojima and M. Takasawa, Entropy versus volume for pseudo-Anosovs, *Experiment. Math.*, 18 (2009), 397-407, 査読有.
- (16) Z-Q. Chen, P. Kim and T. Kumagai, On heat kernel estimates and parabolic Harnack inequality for jump processes on metric measure spaces, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 25 (2009), 1067-1086, 査読有.
- (17) S. Matsumoto, Rigidity of locally free Lie group actions, *Sugaku Expositions*, 22 (2009), 査読有.
- (18) S. Matsumoto, The parameter rigid flows on orientable 3-manifolds, *Contemporary Mathematics*, 498 (2009), 135-139, 査読有.
- (19) T. Ohtsuki, Invariants of knots derived from equivariant linking matrices of their surgery presentations, *Internat. J. Math.*, 20 (2009), 883-913, 査読有.
- (20) G. Bell and K. Fujiwara, The asymptotic dimension of a curve graph is finite, *J. London Math. Soc.* 77 (2008), 33-50, 査読有.
- (21) S. Morita, Lie algebras of symplectic derivations and cycles on the moduli spaces, *Geometry and Topology Monographs*, 13 (2008), 335-354, 査読有.
- (22) T. Ohtsuki, R. Riley and M. Sakuma, Epimorphisms between 2-bridge link groups, *Geom. Topol. Monogr.*, 14 (2008), 417-450, 査読有.
- (23) S. Kiriki and T. Soma, Persistent antimonotonic bifurcations and strange attractors for cubic homoclinic tangencies, *Nonlinearity*, 21 (2008), 1105-1140, 査読有.
- (24) E. Kin and M. Takasawa, An asymptotic behavior of the dilatation for a family of pseudo-Anosov braids., *Kodai Math. J.*, 31 (2008), 92-112, 査読有.
- (25) M. Bestvina and K. Fujiwara, Quasi-homomorphisms on mapping class groups, *Glasnik Matematički*, 42 (2007), 213-236, 査読有.
- (26) K. Fujiwara and K. Whyte, A note on spaces of asymptotic dimension one, *Algebraic & Geometric Topology*, 7 (2007), 1063-1070, 査読有.
- (27) T. Ohtsuki, On the 2-loop polynomial of knots, *Geometry and Topology*, 11 (2007), 1357-1475, 査読有.
- (28) D. Moskovich and T. Ohtsuki, Vanishing of 3-loop Jacobi diagrams of odd degree, *J. Combin. Theory Ser. A*, 114 (2007), 919-930, 査読有.
- (29) T. Ohtsuki, Invariants of knots and 3-manifolds, *Sugaku Expositions*, 20 (2007), 1-14, 査読有.
- (30) S. Kiriki and T. Soma, Parameter-shifted shadowing property of Lozi maps, *Dynam. Sys.*, 22 (2007), 351-363, 査読有.
- (31) K. Fujiwara and P. Papasoglu, JSJ-decompositions of finitely presented groups and complexes of groups, *Geom. and Funct. Anal.*, 16 (2006), 70-125, 査読有.
- (32) K. Fujiwara, K. Nagano and T. Shioya, Fixed point sets of parabolic isometries of CAT(0)-spaces, *Comm. Math. Helv.* 81 (2006), 305-335, 査読有.
- (33) S. Kojima, S. Mizushima and S. P. Tan, Circle packings on surfaces with projective structures and uniformization, *Pacific J. Math.*, 225 (2006), 287-300, 査読有.
- (34) S. Kojima, S. Mizushima and S. P. Tan, Circle packings on surfaces with projective structures: A survey, *LMS*

Lecture Note Series, 329 (2006), 337-353, 査読有.

(35) T. Soma, Existence of ruled wrappings in hyperbolic 3-manifolds, *Geom. Topol.*, 10 (2006), 1173-1184, 査読有.

(36) T. Soma, Scott's rigidity theorem for Seifert fibered spaces; revisited, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358 (2006), 4057-4070, 査読有.

[学会発表] (計 63 件)

(1) 小島定吉, Entropy versus Volume, Workshop on "Branched coverings, degenerations and related topics, 2010.03.12, 広島大学.

(2) 小島定吉, 円周上の曲面束の幾何とトポロジー, 2010.01.20, 京都大学数学教室談話会.

(3) 金英子, 高沢光彦, Bounds for minimal dilatations of pseudo-Anosovs, *Hyperbolic geometry: algorithmic, number theoretic and numerical aspects*, 2010.03.18, KIAS (Korea).

(4) 金英子, 高沢光彦, Bounds for minimal dilatations of pseudo-Anosov Mapping class groups, *TQFT and invariants of 3-manifolds*, 2010.02.16, 東京工業大学.

(5) 熊谷隆, Heat kernel estimates for random walks on random media at criticality, *Above the critical dimension*, 2009.12.7, Institut Henri Poincare (France).

(6) 熊谷隆, Random walks on disordered media and their scaling limits, *The XXIst Rolf Nevanlinna Colloquium*, 2009.09.11, 京都大学.

(7) 熊谷隆, Convergence of discrete Markov chains to jump processes and its application to random conductance models, *Scaling Limits in Models of Statistical Mechanics*, 2009.08.20, Oberwolfach (Germany).

(8) 熊谷隆, Discrete approximation of symmetric jump processes on metric measure spaces, *3rd international conference on stochastic analysis and its applications*, 2009.07.19, Beijing Institute of Technology (China).

(10) 熊谷隆, Convergence of discrete Markov chains to jump processes, *Random Walks in Random Environments*, 2009.06.16, University of British Columbia (Canada).

(11) 相馬輝彦, Existence of generic cubic homoclinic tangencies for Hénon maps, *NCTS Dynamics Day—focusing on non-hyperbolic systems*, 2009.11.06, Nat'l Chiao Tung Univ. (Taiwan).

(12) 相馬輝彦, 幾何的極限とエンディング・ラミネーション予想, 日本数学会年会・トポロジー分科会特別講演, 2009.03.26, 東京大学.

(13) 相馬輝彦, Geometric limits and Ending Lamination Conjecture, 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 2009.01.12, 大阪大学.

(14) 金英子, 高沢光彦, 小さなエントロピーを持つブレイドと3成分鎖絡み目補空間, 日本数学会, 2009.09.25, 大阪大学.

(15) 金英子, 高沢光彦, An upper bound for the minimum entropy of mapping class of closed surfaces, *Simplicial Complexes Arising in Low-Dimensional Topology*, 2009.07.02, 東京工業大学.

(16) 金英子, 高沢光彦, Pseudo-Anosov braids with small entropy and the magic 3-manifold, 2008年度冬の力学系研究集会, 2009.01.09, 日本大学軽井沢研修所.

(17) 藤原耕二, The asymptotic dimension of mapping class groups is finite., *Geometric Structures and Geometric Group Theory*, 2009 Joint Meeting of KMS and AMS, , 2009.12.16., Ewha Womans University, Seoul (Korea).

(18) 藤原耕二, Subgroups in the group of interval exchange transformations. , *KIAS Workshop on Geometric Structures and Geometric Group Theory*, 2009.12.15, KIAS (Korea).

(19) 藤原耕二, The asymptotic dimension of mapping class groups is finite., 群と力学系に関わる離散幾何学, 2009.9.2., 愛媛大学.

(20) 藤原耕二, CAT(0) and CAT(-1) fillings of hyperbolic manifolds, *Davis 60*, 2009.6.17, Bedlewo (Poland).

(21) 藤原耕二, The asymptotic dimension of mapping class groups is finite., *Groups, embeddings and applications*, 2009.3.19, U. of Hawaii (USA).

(22) 藤原耕二, . CAT(0) and CAT(-1) fillings of hyperbolic manifolds, *リーマン幾何と幾何解析*, 2009.2.20, 筑波大学

(23) 大槻知忠, ベッチ数が1の3次元多様体に対するLMO不変量の精密化と摂動的不変量, *トポロジーシンポジウム*, 2008.08.06, 金沢市文化ホール.

(24) 大槻知忠, A refinement of the LMO invariant for 3-manifolds with the first Betti number 1, *Finite type invariants, fat graphs and Torelli-Johnson-Morita theory*, 2008.04.01, Aarhus University (Denmark).

(25) 小島定吉, Entropy vs Volume, *KIAS Workshop on hyperbolic geometry and related topics*, 2008.12.15, KIAS (Korea).

(26) 金英子, 高沢光彦, Braids with small entropy and the magic manifold, Topology and Computers 2008, 2008.08.28, 東京工業大学.

(27) 金英子, 高沢光彦, On the pseudo-Anosov braids which arise as monodromies of fiber surfaces for the 3 chain link complement, Workshop on Topology and Geometry - Braids and related topics -, 2008.05.31, 広島大学.

(28) 金英子, 高沢光彦, Entropy of pseudo-Anosov braids and fiber surfaces of hyperbolic 3-manifolds, The Fourth East Asian School of Knots and Related Topics, 2008.01.21, 東京大学.

(29) 金英子, 高沢光彦, Entropy of pseudo-Anosov braids and fiber surfaces of hyperbolic 3-manifolds, 2007 年度冬の力学系研究集会, 2008.01.07, 日本大学軽井沢研修所.

(30) 藤原耕二, Combable functions and the central limit theorem, Geometric Group Theory, Hyperbolic Dynamics and Symplectic Geometry, 2008.09.12, Oberwolfach (Germany).

(31) 藤原耕二, Schottky subgroups in mapping class groups, Nonpositive curvature and the elementary theory of free groups, 2008.06.11, Anogia (Greece)

(32) 松元重則 Unique ergodicity of transversely equicontinuous laminations, 研究集会「葉層構造と微分同群」, 2008.10.28, 東京大学玉原国際セミナーハウス.

(33) 森田茂之, Higher symplectic pairings and invariants in low dimensional topology, 日仏科学フォーラム, 2008.10.7, 東京大学大学院数理学研究科.

(34) 森田茂之, Automorphism groups of nilpotent quotients of fundamental groups of surfaces and homology cobordisms of 3-manifolds, International workshop on finite type invariants, fat graphs and Torelli-Johnson-Morita theory, 2008.3.26, Aarhus University (Denmark).

(35) 大槻知忠, A refinement of the LMO invariant for 3-manifolds with the first Betti number 1, International Conference on Topology and its Applications 2007, 2007.12.05, 京都大学.

(36) 大槻知忠, Aperturbative invariant of 3-manifolds with the first Betti number 1, Geometric Topology Conference, 2007.06.19, Peking University (China).

(37) 小島定吉, Comparison of hyperbolic volumes with other invariants, Workshop on hyperbolic structures on 3-manifolds and

large scale geometry of Teichmuller space, 2007.07.20, Warwick (UK).

(38) 相馬輝彦, Geometry and topology of geometric limits, Topics in Teichmuller Theory and Kleinian Groups, 2007.11.13, MSRI, Berkeley (USA).

(39) 相馬輝彦, Ahlfors' measure problem for geometric limit Kleinian groups, Lars Ahlfors Centennial Celebration, 2007.08.24, Univ. of Helsinki (Finland).

(40) 相馬輝彦, Geometric limits of quasi-Fuchsian groups, Hyperbolic Structures on 3-Manifolds and Large Scale Geometry of Teichmuller Space, 2007.06.16, Warwick (UK).

(41) 相馬輝彦, Cubic dynamics on the Hénon family, 2006 年度冬の力学系研究集会, 2007.01.07, 東京大学.

(42) 金英子, 高沢光彦, A property of the dilatation spectrum of the chain-link with 3 components - いくつかの計算機実験について -, 奈良女子大学トポロジーセミナー, 2007.10.29, 奈良女子大学.

(43) 金英子, 高沢光彦, On the volume and topological entropy of mapping tori of  $n$ -punctured disks, 日本数学会, 2007.03.29, 埼玉大学.

(44) 金英子, 高沢光彦, On the dilatation and volume of mapping tori, 研究集会「リーマン面・不連続群」, 2007.02.03, 島根大学.

(45) 藤原耕二, Rank-1 isometries on CAT(0) spaces and quasi-homomorphisms, Topics in Geometric Group Theory, 2007.11.6, MSRI (USA).

(46) 藤原耕二, 双曲性と擬準同型. 第54回幾何学シンポジウム, 2007.8.26, 鹿児島大学.

(47) 藤原耕二, Hyperbolicity, quasi-homomorphisms and stable commutator length, Hyperbolic structures on 3-manifolds and large scale geometry of Teichmuller space, 2007.7.18, Warwick (UK).

(48) 藤原耕二, A characterization of higher rank symmetric spaces via bounded cohomology, Groups 007 at CIRM, 2007.2.20, Luminy (France).

(49) 藤原耕二, Stable commutator length of mapping class groups, 2007.1.10, RIMS, 京都.

(50) 相馬輝彦, 3次ホモクリニック接触における非単調分岐とストレンジアトラクタの存在, 日本数学会秋期総合分科会・トポロジー分科会, 2006.09.19, 大阪市立大学.

(51) 相馬輝彦, Existence of ruled wrappings in hyperbolic 3-manifolds, 多様体上の双曲群の作用とその周辺,

2006.06.27, 首都大学東京.

(52) 小島定吉, Packings on projective Riemann surfaces, Teichmüller spaces (classical and quantum), 2006.06.01, Oberwolfach (Germany).

(53) 金英子, 高沢光彦, On the dilatation and volume of mapping tori, Topology and Computers 2006, 2006.11.27-29, 大阪産業大学梅田サテライト.

(54) 金英子, 高沢光彦, On dilatation and volume of mapping tori, 大阪大学低次元トポロジーセミナー, 2006.11.14, 大阪大学.

(55) 藤原耕二, A characterization of higher rank symmetric spaces via bounded cohomology, 日中友好幾何学研究集会, 2006.12.16, 西安 (China).

(56) 藤原耕二, 曲面のカーブグラフと写像類群の幾何. 関数論シンポジウム, 2006.9.16, 東工大.

(57) 藤原耕二, Stable commutator length on mapping class groups, Groups of diffeomorphisms, 2006.09.15, 東京大学.

(58) 藤原耕二, Geodesic spaces of asymptotic dimension one, Geometric and asymptotic group theory with applications, 2006 ICM satellite meeting, 2006.09.02, Barcelona (Spain).

(59) 藤原耕二, Stable commutator length on mapping class groups, Geometric group theory, dynamical system and symplectic geometry, 2006.07.28, Oberwolfach (Germany).

(60) 藤原耕二, Asymptotic dimension of a curve graph is finite, Geometry on Groups, 2006.07.04, 札幌.

(61) 藤原耕二, Asymptotic dimension of a curve graph is finite, 多様体上の双曲群の作用とその周辺, 2006.06.28, 首都大.

(62) 藤原耕二, Asymptotic dimension of a curve graph is finite, Teichmüller space, 2006.06.02, Oberwolfach (Germany).

(63) 藤原耕二, Asymptotic dimension of a curve graph is finite, Combinatorial and geometric group theory, 2006.05.08, Vanderbilt University (USA).

[その他]

ホームページ

<http://www.is.titech.ac.jp/~sadayosi>

<http://nevanlinna.jp/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小島 定吉 (KOJIMA SADAYOSHI)  
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号: 90117705

### (2) 研究分担者

吉田 朋好 (YOSHIDA TOMOYOSHI)  
東京工業大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 60055324

森田 茂之 (MORITA SHIGEYUKI)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 70011674

松元 重則 (MATSUMOTO SHIGENORI)  
日本大学・理工学部・教授  
研究者番号: 80060143

相馬 輝彦 (SOMA TERUHIKO)  
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 50154688

藤原 耕二 (FUJIWARA KOJI)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 60229078

大槻 知忠 (OHTSUKI TOMOTADA)  
京都大学・数理解析研究所・准教授  
研究者番号: 50223871

高沢 光彦 (TAKASAWA MITSUHIKO)  
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・助教  
研究者番号: 80323822

熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 90234509

### (3) 連携研究者

なし