

平成 21 年 4 月 3 日現在

研究種目：基盤研究 A

研究期間：2006 - 2009

課題番号：18204011

研究課題名（和文） 非線形拡散場が生成保存する構造

研究課題名（英文） Structures created and preserved in nonlinear diffusion field

研究代表者 儀我美一

大学院数理科学研究科

教授

70144110

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形拡散 / ナヴィエ・ストークス / 平均曲率流 / 結晶成長 / ファセット

## 1. 研究計画の概要

非線形拡散場の中での構造や、形態の生成保存を解明することを目的とし、具体的には結晶成長の記述に関わる微分方程式や回転場内の流体力学の方程式について数学解析を行う。代表的課題をまとめると次のとおり

( ) 結晶成長問題について：

( a ) 円柱形の結晶の平らな面（ファセット）が分裂した後の解が外場を既知として時間局所的に具体的に構成する。

( b ) 特異拡散方程式に対して、駆動力が非一様な場合に粘性解の理論を構成する。

( c ) 曲率を考慮しない結晶成長モデル式であるハミルトン・ヤコビ方程式に対して、その時間無限大での挙動を明らかにし、それを証明する。

( ) 回転場内のナヴィエ・ストークス方程式について：

( d ) （初期値問題に対して）回転の速さによらない時間区間での時間局所的古典解の存在。

( e ) 回転の速さによらず、レイノルズ数が小さいときの時間大域古典解の存在。

( f ) 概周期関数を初期値としたときの概周期性の保存と大きな回転数の場合の時の古典解の存在。

その他、( ) ( ) の両方に関係のある自由境界問題等も計画していた。また、ナヴィエ・ストークス方程式や曲率流方程式の解の数学解析についての基礎について、研究書の出版を目指している。

以上の研究計画を実現するために、関連研究者の招聘やまた、海外も含めていくつかの研究集会を開催する。

## 2. 研究の進捗状況

結晶成長分野に現れるファセットの出現を許す特異拡散方程式については、ファセットの安定性条件を導出したのち、さらに実際、ファセット分裂を許す解を自由境界問題を解くことにより成功し、これについては Rybka 教授と研究代表者がいくつかの論文にまとめて発表している。特異拡散方程式の粘性解の理論については、既に結果が出ていて、現在研究代表者が論文として取りまとめ中である。また、ハミルトン・ヤコビ方程式の時間無限大での挙動については連携研究者の石井が粘性解の枠組みで無限領域における弱 KAM 理論を構築するなど、大きな成果を挙げた。

ナヴィエ・ストークス方程式については、Mahalov 教授と研究代表者が中心になり、Saal 博士、乾博士らと共に、回転の速さによらず一定の時間での局所解の存在を示した。さらに、あるノルムで初期値が小さいとき、回転数の大きさによらずに時間大域解を構成した。概周期関数を初期値とした問題の概周期性の保存問題も解決した。回転数が大きい場合の時間大域解の存在にたいしても、ほぼ結果の概略がかたまりつつある。また準備している研究書も 2009 年度中に出版予定である。

このように、予定していた課題のほとんどは既に論文としてまとめたか、あるいは現在取りまとめ中である。また 2009 年度のものを含め、(海外での場合も含めて)いくつか

の国際会議を主催している。これにより研究に弾みがついている。

3. 現在までの達成度  
当初の計画以上に進展している。

<理由>

主要課題については、ほとんど解決のメドが立った、あるいは解決されている。この課題では積極的に目指さなかった放物型方程式の解の爆発問題や、曲率流方程式の微分ゲーム的解釈といった分野でも成果を挙げられた。研究書の出版は若干遅れたが、これは出版社側の査読の都合によるものが大きい。また海外からの反響も大きい。このように、当初予定されていた研究計画はほぼ実行され、21年度は成果発信及び取りまとめの時期となっている。

#### 4. 今後の研究の推進方策

本研究計画は海外での反響も大きかった。その結果、確率解析的側面にもっと注意する必要がある事を認識した。そこで、確率解析の専門家チームに加え、新たに基盤 S として、さらにテーマを広げ「形態変動解析学」の構築を目指すことにした。

本年度は取りまとめと研究計画には書けなかったほかの関連課題（解の爆発など）についても考察を行う。

#### 5. 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計5件)

1. Y. Giga and P. Rybka, Facet bending in the driven curvature flow in the plane, *J. Geometric Analysis*, 18 (2008), 109-147.
2. Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov, S. Matsui and J. Saal, Rotating Navier-Stokes equations in  $\mathbb{R}^3$  with initial data nondecreasing at infinity : The Ekman boundary layer problem, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 186 (2007), 177-224.
3. Y. Giga, M. Kubo and Y. Tonegawa, Magnetic clusters and fold energies, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A* 137 (2007), 23-40.
4. H. Ishii, Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean  $n$  space, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. N on Linéaire*, 25, (2008) 231-266.
5. M. Roeger, Y. Tonegawa, Convergence

of phase-field approximations to the Gibbs-Thomson law, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 32, (2008) no. 1, 111-136.

〔学会発表〕(計5件)

1. Y. Giga, Surface evolution equations a level set approach, Summer School, PDE from Geometry, Cologne, ドイツ, 2008年7月21日 - 25日
2. Y. Giga, Evolution equations with almost periodic initial data, Nonlocal and abstract Parabolic Equations and their Applications, Bedlewo, ポーランド, 2007年7月25日
3. H. Ishii, Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations for large time and related topics, 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2007), Zurich, スイス, 2007年7月19日
4. H. Ishii, Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations, International Congress of Mathematicians, Madrid, スペイン, 2006年8月26日
5. Y. Tonegawa, Various mathematical questions arising in phase separation problem, Oberseminar, Max Planck Institute, ドイツ, 2007年8月26日

〔図書〕(計3件)

1. Y. Giga, "Surface Evolution Equations - a level set approach", Birkhauser, Basel-Boston-Berlin, 273pp, (2006)
2. Y. Giga, H. Kozono, H. Okamoto and Y. Shibata eds, Kyoto Conference on the Navier-Stokes equations and their applications, 2007, March, RIMS Kokyuroku, Bessatsu, B1, (2007)
3. Y. Giga, S. Koike, T. Ozawa and N. Yamada, eds, International Conference for the 25th Anniversary of Viscosity Solutions, Gakkotosho International Series, Mathematical Sciences and Applications 30, Gakkotosho, Tokyo (2008).

〔産業財産権〕

出願状況 (計 件)

取得状況 (計 件)

〔その他〕