

平成 21 年 9 月 8 日現在

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2006－2009

課題番号：18204011

研究課題名（和文） 非線形拡散場が生成保存する構造

研究課題名（英文） Structures created and preserved in nonlinear diffusion field

研究代表者

儀我 美一 (GIGA, Yoshikazu)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号 70144110

研究成果の概要：様々な形態がどの様にして生成され、保存されていくかを解明することは自然科学全般に渡って重要な問題である。その原理は多様ではあるが、本研究では拡散効果に異方性がある結晶成長現象を記述する微分方程式や、回転場内流体の運動方程式を中心に、解概念の構築をはじめ解の存在等の数学解析の理論を構築した。その応用として、成長する結晶の平らな面が崩れず、安定となる条件を導出し、結晶成長学の基礎理論の数学的裏付けを与えた。

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	8,900,000	2,670,000	11,570,000
2007 年度	8,400,000	2,520,000	10,920,000
2008 年度	9,000,000	2,700,000	11,700,000
2009 年度	9,000,000	2,700,000	11,700,000
年度			
総計	35,300,000	10,590,000	45,890,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形拡散／ナビエ・ストークス／平均曲率流／結晶成長／ファセット

1. 研究開始当初の背景

形態形成についての数学的取り組みは様々であるが、主に反応拡散方程式によるものが多く、この場合、拡散項は多くの場合線形である。例えば、金属の焼きなまし時の粒界と呼ばれる結晶表面の運動は、適当な条件のもとでは平均曲率流方程式という**拡散効果そのものが非線形**な方程式によって記述される。また流体力学の方程式であるナビエ・ストークス方程式は、粘性項こそ線形ではあるが、輸送項や圧力項といった項があり、反応拡散方程式には分類出来ないものである。結晶成長の問題では、表面エネルギーや運動係数についての異方性が非常に強い場合、またナビエ・ストークス方程式については、

回転場内の場合、空間無限遠で減衰しない速度場についての回転と解の滑らかさの関係等、数学的理論が未整備であった。特に異方性の強い特異拡散方程式については、解概念そのものが平らな面が分裂するような現象を記述出来るようにはなっていない。

2. 研究の目的

(1) **研究の全体構想**：様々な非線形現象が非線形拡散場により記述されている。材料科学における平均曲率流方程式はこの典型例で、画像処理にも用いられる。また、非圧縮性粘性流体の運動は、ナビエ・ストークス方程式で記述される。どちらも**非線形拡散型偏微分方程式**の一例であり、非線形拡散場で

記述される現象である。非線形偏微分方程式の解の持つ**構造**が時間発展と共に保たれるか、また構造が生成されるかは形態変化の仕組みを知る上でも重要である。本研究では主に以下のような問題を解析することにより、物理的、工学的に意味のある様々な非線形偏微分方程式の解の形状変化を解明するための数学解析の基礎を築く。

(2) **具体的な目的**：①**特異拡散方程式**：雪結晶のように表面エネルギーの異方性が強い場合、その成長を記述する方程式は形式的には非線形拡散型偏微分方程式ではあるが、異方的曲率が非局所的な量になる場合は拡散が強く、通常の意味では偏微分方程式とはみなせない。その様な特徴を持つ非線形方程式を**特異拡散方程式**という。

特異拡散方程式は、雪結晶成長、多粒界系のような物理的問題から画像処理のような情報工学的な問題まで様々な分野で形式的に用いられているが、その解の概念さえ自明ではない。解の概念をうまく定義し、その一意存在性を示し、平らな面であるファセットが維持されるか、曲がってしまうかを判定することを目指し、解の形状の変化を解明する。具体的には

(a) **一相ステファン型問題** (b) **等高面法と粘性解** (c) **全変動流方程式**に対して、その解の概念を構築し、解の挙動を考察する。②**ナヴィエ・ストークス方程式**：初期値問題の(空間無限遠で減衰している)滑らかな解の時間大域存在の問題は、3次元流の場合1億円の賞金がかかけられているほどの問題である。3次元流であっても一方向への回転が強い場合は、時間大域的に滑らかな解が存在することがある。一方、空間無限遠で減衰しない初期値の場合は圧力のとり方によっては有限時間で解が爆発することがある。

一般に非線形拡散方程式をユークリッド空間や他の非有界領域で考える場合、空間無限大でデータや解が減衰するもの考えることが多く、その場合の結論は有界領域や周期条件の場合と似通ってくる。真に無限遠での寄与を見るため、ナヴィエ・ストークス方程式にとどまらず、様々な方程式を空間無限遠で減衰しない枠組みで考え、その無限遠での構造が保たれるかどうか調べる。

3. 研究の方法

(1) 結晶成長の問題については、まず円柱形の結晶の平らな面(ファセット)が分裂した後の解を、外場を既知として時間局所的に具体的に構成する。この問題については研究代表者が海外共同研究者の P. Rybka 准教授

(ワルシャワ大)と共同で取り組み、必要に応じてこの方面で先駆的な仕事をした儀我美保東大 COE 特任研究員の協力を求める。

一方、解のさまざまな漸近的な性質について、連携研究者の粘性解の世界的権威石井仁司教授(早大)が取り組む。粘性解については解の滑らかさがないため、その性質等未解決なものが多い。また変分学的アプローチは分担者の利根川吉廣教授(北大)が試みる。

結晶成長現象との対比については理論研究者の横山悦郎教授(学習院大)を研究協力者とし、討論を通じ、ファセット安定性を論じる。なお画像処理への応用については工学者の本谷秀堅准教授(名工大)を協力者として取り組む。

(2) ナヴィエ・ストークス方程式については研究代表者が海外共同研究者の地球流体の解析に明るい A. Mahalov 教授(アリゾナ州立大)との共同研究により、強い回転場の下での時間大域的可解性を必ずしも周期条件を満たさない概周期的な初期値の場合を示すため、非線形項について実解析的に考察し、有効な評価を確立する。テーマ(1)と

(2)は全く独立というものではなく、それぞれの研究手法がテーマに応用できないか注意をはらって研究をすすめる。これらの研究を遂行するために、様々な研究集会を開催し、また関連研究者の招聘を行なう。

4. 研究成果

上述した非線形拡散方程式のさまざまな解の性質を調べ、その方程式についての解析的性質を明らかにした。具体的成果は次のとおりである。

(1) 結晶成長問題と関連する自由境界値問題

①結晶成長現象では、ファセットと呼ばれる平らな面が現れることがある。この場合、結晶表面の成長を記述する方程式には、表面エネルギー密度関数に異方性があり、その関数に特異点がある。いわゆる特異拡散方程式である。一般にファセットが分裂しないかどうかの有効な条件を導出することは難しいが、円柱形結晶で平衡形も円柱にある場合のファセットの安定性の条件を導出した。また、ファセット分裂が起きる解は自由境界値問題を解くことにより、2次元結晶の場合に具体的に構成した。ファセット分裂を起す解の構成はこれが初めてである。これらは海外研究者の P. Rybka 准教授と、研究代表者の共同研究である。

②特異拡散方程式についての粘性解理論の構築の試み：非一様な場における特異拡散方

程式の粘性解理論の構築は従来出来ていなかったが、研究協力者の儀我美保博士との共同研究により、その基礎的部分が確立された。なお、非特異拡散方程式の典型例であるクリスタライン曲率流方程式については、研究協力者の本谷准教授を含めた共同研究により、画像解析に有効な自己相似解の構成に成功した。

③結晶成長現象についてのファセット分裂については、曲率流方程式を用いず、ハミルトン・ヤコビ方程式を用いるのが伝統的方法である。確かに結晶がる程度の大きさになれば、その効果が大きいと考えられる。結晶成長理論による証明は定性的なので、これをハミルトン・ヤコビ方程式の解の漸近挙動として特徴付けた。これにより定量的証明を与えられた。以上は研究協力者の横山教授とRybka 准教授と研究代表者の共同研究である。

一方、連携研究者の石井は、ハミルトン・ヤコビ方程式の時間無限大での解の挙動を粘性解理論の枠組みで解明し、無限領域における弱 KAM 理論を構築するなど、大きな成果を挙げた。上述のモデルはこの理論ハミルトニアンが強圧的ではないので、この理論が直接適用できない。今後の研究が待たれる。

④拡散型界面運動方程式のモデルとの関係：平均曲率流方程式による曲面の運動は Allen-Cahn 方程式と呼ばれる反応拡散方程式の内部遷移層の運動とみなせる。これについて異方性が強くとも、この特異極限による収束は表面エネルギーの特異性にはよらない。「一様」収束であることを研究協力者の大塚岳博士（明治大）、R. Schätzle 教授（チュービンゲン大）と研究代表者が示した。なお、研究分担者の利根川は拡散曲面の曲率と、曲面の曲率の関係を与え、いわゆる De Giorgi 予想を一部解決した。

⑤全変動流方程式について：特異拡散方程式の中でのひとつの重要なクラスであり、画像処理に応用されている。この中で特にカラーの画像処理にも用いられる球面に値を 1-調和写像流について、通常の調和写像と同じ様に解の微分の有限時間内爆発が成立することが、かつて研究代表者によって示されたが、この解の近似スキームについて考察した。なお、この問題は多粒界結晶成長モデルとしても用いられる重要なモデルである。

(2) 空間無限遠で減衰しないナビエ・ストークス方程式

①地球流体のような回転場の中の流体を記述するコリオリカナヴィエ・ストークス方程式は、回転場に対応する発展作用素であるポアンカレ・ソボレフの群が拡散型ではなく、

分散型であるため、通常の拡散方程式を扱いやすい空間で初期値問題を解くことは難しい。例えばレイノルド数が小さいとき、回転数によらず時間無限大の解が構成できるかは未知であった。これに対して有限測度のフーリエ変換全体の関数の 1 階微分で与えられる関数については小さな初期値についての時間大域解の構成に成功した。これは研究協力者の Mahalov 教授らとの共同研究による。その他、概周期構造が時間発展と共に保たれることも示した。概周期関数は空間無限大で減衰しないので、空間無限遠で減衰しない関数空間を扱うことは重要である。

②半線形熱方程式の解の爆発問題：空間無限遠で減衰しない初期値が与える効果を見るため、半線形熱方程式について考察した。解の爆発問題自体はよく考察されているが、空間無限大で減衰する初期値についての結果が多い。例えば空間無限遠で上限に収束する初期値の場合、爆発がどこで起きるかどうかも不明であった。この問題に取り組み、非線形項が未知関数のベキ乗や指数関数の場合、爆発は空間無限遠のみで起きることを示した。さらに、爆発のおきる方向の概念を導入し、初期値の形との関連を明確にした。これらは研究協力者の梅田典晃博士（東大）等との共同研究である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 36 件)

(儀我先生)

1. Y. Giga, Y. Seki and N. Umeda, Mean curvature flow closes open ends of noncompact surface of rotation, Commun. PDE., to appear. (査読有)
2. Y. Giga and Q. Liu, A billiard-based game interpretation of the Neumann problem for the curve shortening equation, Adv. Diff. Eq. 14(2009), 201-240. (査読有)
3. Y. Giga and P. Rybka, Facet bending driven by the planar crystalline curvature with a general nonuniform forcing term, J. Differential Equations, 246(2009), 2264-2303. (査読有)
4. Y. Giga and J. Zhai, Uniqueness of constant weakly anisotropic mean curvature immersion of sphere S^2 in R^3 , Advances in Differential Equations, 14(2009), 601-619. (査読有)
5. Y. Giga and Q. Liu, A remark on the

- discrete deterministic game approach for curvature flow equations, Proc. International Conference on Nonlinear Phenomena with Energy Dissipation, (eds. A. Damlamian, N. Kenmochi, M. Mimura, J. Sprekels), Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications, 29, Gakkotosho, Tokyo (2008), pp.103-115. (査読有)
6. Y. Giga, Evolution equations with almost periodic initial data, International Conference for the 25th Anniversary of Viscosity Solutions, (eds. Y. Giga, S. Koike, T. Ozawa and N. Yamada), Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications, 30, Gakkotosho, Tokyo (2008), pp.97-106. (査読有)
7. M. Geissert and Y. Giga, On the Stokes resolvent equations in locally uniformly L^p spaces in exterior domains, Functional analysis and evolution equations, 307-314, Birkhauser, Basel (2008). (査読有)
8. Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov and J. Saal, Uniform global solvability of the rotating Navier-Stokes equations for nondecaying initial data, Indiana Univ. Math. J., 57(2008), 2775-2792. (査読有)
9. Y. Giga and P. Rybka, Faceted crystal grown from solution - a Stefan type problem with a singular interfacial energy, Proceedings of the 4th JSAM-SIMAI Seminar on Industrial and Applied Mathematics, (eds. H. Fujita and M. Nakamura) Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications, 28, Gakkotosho, Tokyo (2008), pp.31-41. (査読有)
10. Y. Giga and N. Umeda, On instant blow-up for semilinear heat equations with growing initial data, Methods and Applications of Analysis, 15(2008), 185-196. (査読有)
11. E. Yokoyama, Y. Giga and P. Rybka, A microscopic time scale approximation to the behavior of the local shape on the faceted surface under a nonuniformity in supersaturation, Physica D, 237(2008), 2845-2855. (査読有)
12. Y. Giga, H. Jo, A. Mahalov and T. Yoneda, On time analyticity of the Navier-Stokes equations in a rotating frame with spatially almost periodic data, Physica D, 237(2008), 1422-1428. (査読有)
13. Y. Giga and P. Rybka, Facet bending in the driven curvature flow in the plane, J. Geometric Analysis, 18(2008), 109-147. (査読有)
14. N. Ichihara and H. Ishii, The large-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations on the real line, Methods Appl. Anal., 15 (2008), 223-242. (査読有)
15. N. Ichihara and H. Ishii, Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations with semi-periodic Hamiltonians, Comm. Partial Differential Equations, 33 (2008), 784-807. (査読有)
16. H. Ishii, Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean n space, Ann. Inst. H. Poincaré Anal., Non Linéaire 25 (2008), 231-266. (査読有)
17. Y. Tonegawa, Applications of geometric measure theory to two-phase separation problems [translation of Sugaku 57 (2005), 178-196]. Sugaku Expositions, Sugaku Expositions 21 (2008), 97-115. (査読有)
18. M. Röger and Y. Tonegawa, Convergence of phase-field approximations to the Gibbs-Thomson law. Calc. Var. Partial Differential Equations, 32 (2008), 111-136. (査読有)
19. Y. Giga, PDE-Based Image Processing (3), (PDEを利用した画像処理 (3)), Medical Imaging Technology, 25 (2007), 56-59 (in Japanese) (査読有)
20. Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov and S. Matsui, Uniform local solvability for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force, Kyoto Conference on the Navier-Stokes equations and their applications, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B1, (eds. Y. Giga et al), (2007), pp.187-198. (査読有)
21. Y. Giga, Y. Seki and N. Umeda, Blow up at space infinity for nonlinear heat equations, Recent Advances in Nonlinear Analysis, (eds. M. Chipot et al), Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis, Hsinchu, Taiwan (2006), World Scientific, (2007), pp.77-94. (査読有)
22. Y. Giga, A. Mahalov and B. Nicolaenko, The Cauchy problem for the Navier-Stokes Equations with spatially almost periodic initial data, Mathematical Aspects of

Nonlinear Dispersive Equations (eds. J. Bourgain et al), Annal of Math. Stud, 163, Princeton Press (2007), 213-222. (査読有)

23. Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov and J. Saal, Global solvability of the Navier-Stokes equations in space based on sum-closed frequency sets, Adv. Differential Equations, 12(2007), 721-736. (査読有)

24. Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov, S. Matsui and J. Saal, Rotating Navier-Stokes equations in nondecreasing at infinity : The Ekman boundary layer problem, Arch. Rational Mech. Anal., 186(2007), 177-224. (査読有)

25. Y. Giga, M. Kubo and Y. Tonegawa, Magnetic clusters and fold energies, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A 137(2007), 23-40. (査読有)

26. H. Ishii and H. Mitake, Representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians, Indiana Univ. Math. J., 56 (2007), 2159-2183. (査読有)

27. Y. Nagase and Y. Tonegawa, A singular perturbation problem with integral curvature bound, Hiroshima Math. J., 37 (2007), 455-489. (査読有)

28. Y. Giga and N. Umeda, On blow up at space infinity for semilinear heat equations, J. Math. Anal. Appl., 316(2006), 538-555. (査読有)

29. Y. Giga and P. Rybka, Stability of facets of crystals from vapor, Discrete Contin. Dyn. Syst., 14(2006), 689-706. (査読有)

30. Y. Giga, T. Ohtsuka and R. Schätzle, On a uniform approximation of motion by anisotropic curvature by the Allen-Cahn equations, Interfaces and Free Boundaries, 8(2006), 317-348. (査読有)

31. Y. Giga, H. Kuroda and N. Yamazaki, Global solvability of constrained singular diffusion equation associated with essential variation, Proc. Free boundary problem 2005, International series of Numerical Math., 54 (2006), Birkhauser, 209-218. (査読有)

32. Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov and S. Matsui, Navier-Stokes equations in a rotating frame in R^3 with initial data nondecreasing at infinity, Hokkaido Math. J., 35(2006), 321-364. (査読有)

33. M.-H. Giga, Y. Giga and H. Hontani,

Selfsimilar expanding solutions in a sector for a crystalline flow, SIAM J. Math. Anal., 37(2006), 1207-1226. (査読有)

34. H. Ishii, Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations, International Congress of Mathematicians, Eur. Math. Soc., Zürich, Vol. III (2006) 213-227. (査読有)

35. Y. Fujita, H. Ishii and P. Loreti, Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean n space, Indiana Univ. Math. J., 55 (2006), 1671-1700. (査読有)

36. Y. Fujita, H. Ishii, P. Loreti, Asymptotic solutions of viscous Hamilton-Jacobi equations with Ornstein-Uhlenbeck operator, Comm. Partial Differential Equations, 31 (2006), 827-848. (査読有)

[学会発表] (計 20 件)

1. Y. Giga, Singular diffusion equations with nonuniform driving force, Workshop on Viscosity Solutions and Related Problems, Satellite Campus of Saitama Univ., January 29-30, 2009, Tokyo, (2009) January 29

2. Y. Giga, The Cauchy problem for the Navier-Stokes-Coriolis equations with spatially almost periodic initial data, Seminars on Equations on Mathematical Physics, Warsaw University, (2008), July 30

3. 儀我美一, ファセット安定性問題の数学解析, 第 10 回界面ダイナミクスと数値シミュレーション, 神戸インスティテュート, 2008 年 11 月 27 日-29 日, 神戸, (2008), 11 月 28 日

4. 儀我美一, ファセット安定性問題の数学解析, 結晶成長学会国内会議, 2008 年 11 月 4 日-6 日, 仙台, 基調講演, (2008), 11 月 5 日

5. Y. Giga, On blow up at space infinity, The third Euro-Japan Seminar on Blow up, September 8-12, 2008, Tohoku University, (2008), September 8

6. Y. Giga, Surface Evolution Equations - A level set approach, PDE in Geometry University of Cologne, July 21-25, 2008, (Series of Lectures: three times and Exercises)

7. Y. Giga, The Cauchy problems for the Navier-Stokes equations with spatially almost periodic initial data, New Aspects

and Development of Mathematical Analysis in Nonlinear Phenomena, May 29-31, 2008, Kyushu University, (2008), June 30

8. Y. Giga, On billiards for game interpretation of the Neumann problem for curvature flows, Special Analysis Seminar, Courant Institute, New York University, (2008), May 16

9. Y. Giga, 'On facet bending solutions for planar crystalline curvature flow equations with nonuniform driving force', International Conference on Free Boundary Problems in Chiba 2007, Chiba (2007), November 30

10. 舟木直久, 大規模相互作用系の確率解析とその展開, 日本数学会秋季総合分科会総合講演, 東北大学, 2007年9月22日

11. H. Ishii, Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations for large time and related topics, H. Ishii, 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2007), Zurich, (2007) July 19

12. M.-H. Giga and Y. Giga, 'A level-set method for viscosity solutions with shocks', Viscosity solutions of partial differential equations: recent advances and applications, ICIAM 2007, Zurich (2007), July 18

13. Y. Giga, Evolution equations with almost periodic initial data, Analysis Seminar, University of Constance, Germany (2007), July 5

14. Y. Giga, Evolution equations with almost periodic initial data, Nonlocal and abstract Parabolic Equations and their Applications, Bedlewo, Poland (2007), June 25

15. Y. Giga, Surface Evolution Equations - A level set approach, Aspects of Membrane Dynamics, Royal Institute of Technology, Stockholm (2007), June 21

16. Y. Giga, Evolution equations with almost periodic initial data, International Conference for the 25th Anniversary of Viscosity Solution, University of Tokyo, Japan (2007), June 5

17. Y. Giga, On blow up at spatial infinity for solutions of semilinear heat equations, International Conference on Nonlinear Analysis, National Center for Theoretical Sciences, National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan (2006), November 24

18. Y. Giga, Global solvability of the Navier-Stokes equations in spaces based on sum-closed frequency sets, Rotating Fluids in Geophysics, Bernoulli Center, Ecole Polytechnique Federal de Lausanne, Switzerland (2006), September 21

19. H. Ishii, Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations, H. Ishii, International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain (2006) August 26

20. 儀我美一, 特異拡散方程式とその応用, 発展手法式若手セミナー, (2006) 8月7日, 六甲山セミナーハウス, 神戸

[図書] (計 3 件)

1. Y. Giga, "Surface Evolution Equations - a level set approach", Birkhauser, Basel-Boston-Berlin, 273pp, (2006)

2. Y. Giga, H. Kozono, H. Okamoto and Y. Shibata eds, Kyoto Conference on the Navier-Stokes equations and their applications, 2007, March, RIMS Kôkyûroku, Bessatsu, B1, (2007)

3. Y. Giga, S. Koike, T. Ozawa and N. Yamada, eds, International Conference for the 25th Anniversary of Viscosity Solutions, Gakkotosho International Series, Mathematical Sciences and Applications, 30, Gakkotosho, Tokyo (2008).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

儀我 美一 (GIGA Yoshikazu)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 70144110

(2) 研究分担者

利根川 吉廣 (TONEGAWA Yoshihiro)
北海道大学・大学院理学研究院数学部門・教授
研究者番号: 30254139

(3) 連携研究者

石井仁司 (ISHII Hitoshi)
早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号: 32689734