

平成22年 5月 1日現在

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2006～2009

課題番号：18330187

研究課題名（和文）中学校数学の構成的な論証学習カリキュラムに基づく、デジタル教科書の開発と評価

研究課題名（英文）Development and Assessment of Digital Textbook based on the Curriculum of Constructive Learning of Proofs in Junior High School Mathematics

研究代表者

宮崎 樹夫（MIYAZAKI MIKIO）

信州大学・教育学部・教授

研究者番号：10261760

研究成果の概要（和文）：

本研究は、中学校数学における構成的な論証学習のためのカリキュラムに基づいて生徒が論証の導入期の学習を意欲的に進めることができるようになるために、オープンな場面でのフローチャート証明、及びクローズな場面においてフローチャート証明の構成及び修正を支援する学習コンテンツを授業実践での評価に基づいて開発・改善し、コンテンツからなる学習支援システムをデジタル教科書として構築した。

研究成果の概要（和文）：This research has developed the supporting system designed for the learning of flowchart proof as the digital textbook in order to enable lower secondary students to learn a mathematical proof more actively in the introduction of it. This system has been developed based on the curriculum for constructive learning of mathematical proof. It includes flowchart proofs in the open-ended situation and ones in the closed situation, and has been improved by the assessment of classroom practice.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2007年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2009年度	7,300,000	2,190,000	9,490,000
年度			
総計	13,800,000	4,140,000	17,940,000

研究分野：数学教育

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：中学校数学，論証，フローチャート証明，学習支援システム

1. 研究開始当初の背景
 数学において証明は数学者の活動にとって

コアとなるものであるとともに、数学教育において証明の教授・学習は伝統的かつ中心的な研

究テーマの一つである。そして、数学教育における証明の概念規定、その学習のために必要なカリキュラムの開発、数多くの授業実践及び改善、評価方法の工夫が為されてきた。こうした長年の取り組みにもかかわらず、国際的な状況をみると、証明の学習に多くの子どもが困難を感じ、多くの教師がその指導を日々工夫してはいるものの実質的な成果が上らない状況が続いている。この状況からすると、証明の学習及びその指導の困難性をもたらす主要な原因の一つは、カリキュラムで意図されている形式的な証明が子どもにとって学習可能な形で提供されていないことにあると考えられる。

従来の研究では、形式的な証明と数学的に同型の証明や説明の存在が理論的に特定され、証明の学習における意味・意義について考察され、学習状況の改善に対する効果が実証されてきた。こうした形式的証明の前段階となる証明の一つに「フローチャート証明」がある。この種の証明は、中学校で証明のしくみを学習する場面において教科書で用いられてきたものであり、証明全体の流れや筋道がつかみやすくなる、そして、証明の構成の仕方が体得できるという重要な長所を有している。しかし、現在の証明の学習及びその指導では、この長所が十分に活かされていないのが実情である。

そこで、本研究では、フローチャート証明の長所が積極的に活かされた構成的な論証学習カリキュラムに基づいて、授業のみならず家庭においても子どもがフローチャート証明を構成したり修正したりできる学習環境を整備していくことが意図されている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、中学校において、構成的な論証学習カリキュラムに基づいてフローチャート証明の構成・修正を可能にする学習支援システムをデジタル教科書としてどのように構築することができるか。

3. 研究の方法

前述の目的を達成するために本研究では次の4つの取り組みを行った。

(1) 構成的な論証学習カリキュラムの開発

この取り組みでは、はじめに、数学教育における論証学習カリキュラムの開発に関する先行研究のレビューが進められた。特に、アメリカ合衆国におけるフローチャート証明の研究に基づいて、学習及びその指導におけるフローチャート証明の利用状況と、その有効性や限界を特定することが行われた。次に、論証学習の導入期において証明の難易度に応じてオープンな場面におけるフローチャート証明とクローズな場面におけるフローチャート証明を適

宜織り交ぜることによって構成的な論証学習カリキュラムを開発した。

(2) フローチャート証明の構成・修正を可能にする学習支援システムの構築

この取り組みでは、はじめに、構成的な論証学習カリキュラムに基づいて複数のコンテンツの配列が決定された。続いて、Flash技術によってインターネット上でフローチャート証明の構成促進を可能にするコンテンツの開発が進められた。最後に、誤りの修正促進機能、学習履歴参照機能によって構成されたフローチャート証明の修正促進を可能にするコンテンツの開発が進められ、学習支援システムが構築された。

4. 研究成果

(1) 構成的な論証学習カリキュラムの開発に関する成果

フローチャート証明(図1)は、前提と結論の間の演繹的なつながりを示すものである。各セルは、問題場面の図に関する辺や角の大きさが等しいこと、三角形の合同などを表している。矢印は定理等の全称命題による演繹的な推論を表しており、全称命題の意味や名称が付記されている。このように、フローチャート証明は、前提と結論の間にどのような単称命題がどのように位置づけられているか、そして、単称命題を導くためにどの全称命題がどのように用いられているかを図示したものである。

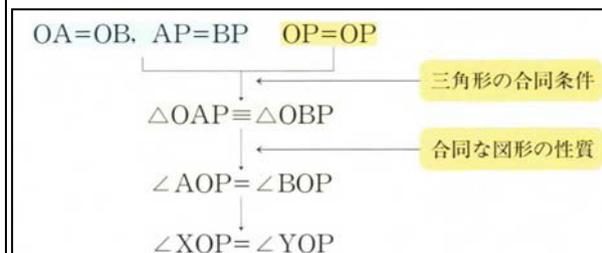


図1 フローチャート証明の例

証明の学習においてフローチャート証明の用い方には少なくとも次の二通りがある。

一つは、形式的な証明のしくみをフローチャート証明でよみとるという用い方である。これは我が国の教科書(中学校第二学年)にみられる。この用い方により生徒は証明の全体的な流れや筋道をつかむことができるようになることが期待されるが、教科書での取り扱いが極めて局所的かつ短期的であり、フローチャート証明の効果は十分に活かされているとはいえない。

他の一つは、正式な証明の前段階としてフローチャート証明をつくるという用い方である。たとえば、USAでは1970年代にTwo-column proofによる伝統的な指導に対しFlow proofによる指導が幅広い内容領域で提唱されている(McMurray(1976)他)。また、教科書Discovering Geometry (Key Curriculum Press, 2003年版)のLesson4.7「Flowchart

Thinking」には三角形の合同条件等を用いてフローチャート証明をつくる活動が位置づけられている。この用い方により、生徒がフローチャート証明をつくることができるようになるかもしれないが、文字式による説明から図形の証明まで、さらには簡易な証明のみならず高度な証明までフローチャート証明をつくることの価値が不明確である。また、フローチャート証明から形式的な証明への移行に関する学習及びその指導が十分に確立されているとはいえない。

そこで、本研究では簡易な証明が扱われる論証学習の導入期に限定してフローチャート証明を用いることにした。そして、問題場面で必要となる推論のステップ数（「証明の複雑さ」）、及び合同な図形の位置関係等（「場面の複雑さ」とともに、オープンな場面でのフローチャート証明の構成からクローズな場面での構成への段階的な移行を考慮し9時間からなる単元のカリキュラムを開発した（図2）。

このカリキュラムに含まれる9時間分の授業は、授業の目的によって次の3種類に分かれている。

- ◆ フローチャート証明をつくる。
第1時、第2時、第3時、第5時
- ◆ フローチャート証明から証明をつくる。
第4時、第6時
- ◆ 証明をフローチャート証明で見直す。
第7時、第8時、第9時



図2 構成的な論証学習カリキュラム

第1時、第2時、第3時では、三角形の合同を示すために必要な仮定をオープンに定める問題でフローチャートをつくる。第1時から第3時にかけて問題場面は次第に複雑になっている。その上で、第4時では、第3時と同じ場面で、与えられた仮定から三角形の合同を示すクローズな問題に変えて、フロー

チャートから証明をつくる。

また、第5時では、三角形の合同を用いて辺や角が等しいことを示すために仮定や合同な三角形の組をオープンに定める問題でフローチャートをつくる。そして、第6時では、第5時と同じ場面で、与えられた仮定から三角形の合同を用いて辺や角が等しいことを示すクローズな問題に変えて、フローチャートから証明をつくる。このようにして、オープンな場面でのフローチャート証明の構成からクローズな場面での構成への移行が段階的に実現されている。

(2) フローチャート証明の構成・修正を可能にする学習支援システムの構築に関する成果
フローチャート証明の構成・修正を可能にする学習支援システムの構築は、大きく次の手順で進められた。

① コンテンツとして採用する問題の選定と構成

開発された構成的な論証学習カリキュラムのうち、「フローチャート証明をつくる」ことを目的とする授業及び家庭学習で生徒が利用できるものを作成した。これは、フローチャート証明の構成が、開発されたカリキュラムで学習を進めていくための基盤となるからである。

コンテンツとして採用された問題数20題である。詳細の構成は以下の通りである。

問題類型	内容	問題場面	推論のステップ数	問題数
0	インターフェースの使い方	オープン	1	3
1	a 平行線と角の性質			4
	b 三角形の合同条件		2	3
2	a 平行線と角の性質→ 三角形の合同条件			4
	b 三角形の合同条件→ 合同な図形の性質	クローズ	2	2
3	a 平行線と角の性質→ 三角形の合同条件			4
	b 三角形の合同条件→ 合同な図形の性質			

② 入力インターフェースの開発

本システムでは、辺や角など図形の構成要素の図的表示がフローチャート証明における記号的表示に自動で変換される。例えば、辺や角など図形の構成要素(例:BO)をマウスで選択し、フローチャートの該当するセルにドラッグしていき、辺や角などをセルに「放り込む」と、記号表示に自動的に変換される(図3)。このように、図形の構成要素の図的表示をフローチャート証明における記号的表示に自動変換することによって、学習者は記号表示に伴う些細なミスに振り回されることなく、フローチャート証明の構成に専念できるようになる。

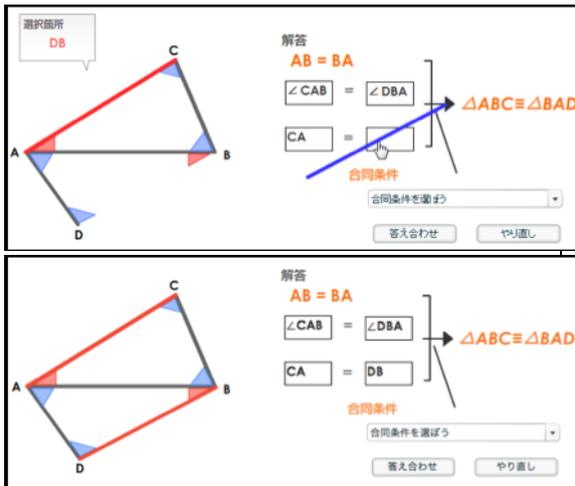


図3 図表示から記号表示への自動変換

③ 解答の修正促進機能の開発

オープンな場面の場合、複数の正答パターンが発生する。生徒の解答について正誤の判断を行うために、本システムでは、正答パターン全てがデータベース化されている。正答パターンと生徒の解答を照合することにより、誤りの箇所を特定することが可能である。開発の初期段階では、データベースとの照合によって明らかになった生徒の解答の誤りが画面上に明示され、生徒の解答のうち修正の候補箇所が枠で囲まれ、「例えばここを直してみよう!」というメッセージが表示されるものであった。

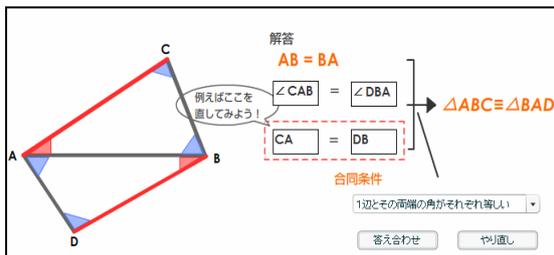


図4 誤答の修正に関するヒントの表示

このような修正促進機能は推論のステップが1ステップであれば一定の効果を期待できるが、推論のステップ数が増えていくと、誤答の箇所が多くなり、それに伴って修正に必要なメッセージの種類も多くなっていく。そのため、単に誤答箇所とメッセージを明示するだけでは修正促進の効果が十分に期待できないことが予想された。

そこで、フローチャートの誤りの質に応じた適切な修正が順序正しく促進されるように修正促進機能を改善することにした。改善の指針は証明の誤りの質に基づく分類及び修正促進の順序性に関する原則の確立である。

はじめに、フローチャート証明の誤りを次の4種類に分類した。

- 類型 A：演繹的な推論の連鎖の誤り
- 類型 B：演繹的な推論の誤り

- 類型 C：演繹的な推論の前件/後件の誤り
- 類型 D：対応の順序の誤り

次に、修正促進の順序性に関する原則に関して証明の構造の階層性に基づいて修正促進に関する類型間の基本的な順序の原則を次のように定めた：” 類型 A→類型 B→類型 C”。また、誤りの類型 B と類型 C では、演繹的な推論の誤り(類型 B)に、推論の前件/後件の誤り(類型 C)が伴う場合があるので、証明の構想・構成や解釈に必要な思考育成のために、その演繹的な推論の誤り(類型 B)の修正に続いて、他の推論の誤りの修正促進が優先されるのではなく、修正された推論の前件/後件の誤り(類型 C)の修正促進が優先される。

例えば、結論「 $AB=CD$ 」が三角形の合同を示すための前提として用いられている場合(図5)、他の箇所にも誤りがあったとしても、この誤りが類型 A に該当するため、最優先に修正促進がなされる。

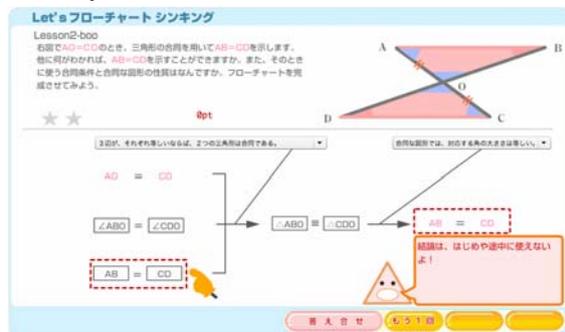
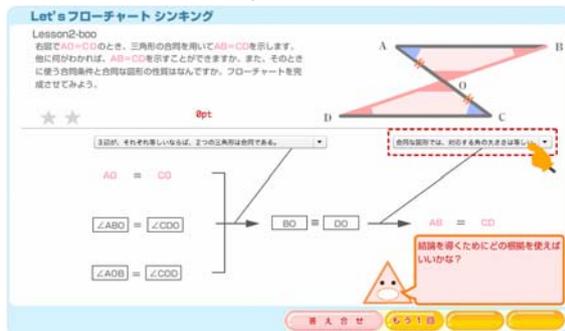


図5 誤り類型 A の修正の優先的な促進

また、結論「 $AB=CD$ 」を示すために、三角形の合同「 $\triangle ABO \equiv \triangle CDO$ 」からではなく「 $BO \equiv DO$ 」に基づいて(類型 C)、合同な図形の性質として誤った根拠用いられている(類型 B)場合、他の箇所にも誤りがあったとしても、はじめに、誤った根拠(類型 B)の修正が促進され、この修正が完了した後「 $BO \equiv DO$ 」(類型 C)の修正が促進される。



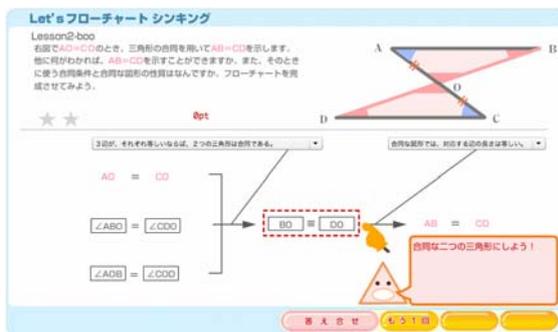


図6 誤りの類型Bと類型Cの修正促進

以上のことから、本システムでは、複数の誤りに対する修正促進の原則として各類型間の基本的な順序、及び類型BとCの局所的な順序が採用された。例えば、2つの演繹的な推論が連鎖するフローチャート証明の場合、本システムの修正促進の原則に従うと、誤りの修正は次の順序で促進される： $A \rightarrow [(B2 \rightarrow C2) \rightarrow (B1 \rightarrow C1)] \rightarrow D$ 。

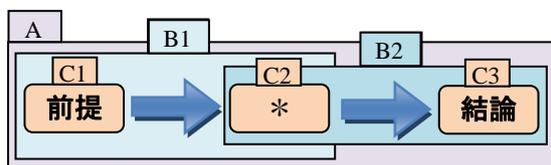


図7 本システムにおける修正促進の例

④ 学習履歴参照機能の開発

本システムで採用されているオープンな場面では、複数の種類のフローチャート証明が正解となる。学習者はある一つの正解を見いだしても、他に正解があれば、システムがその正解を見いだすように学習者を促進する。その際、未だ見いだしていない正解を探すためには、これまでに正解した解答の履歴が必要になる。そこで、本システムには解答履歴参照機能がある。これによって、学習者にはこれまでに正解したフローチャートのどこを変えることができるか/どこを変えてはいけないかと考えながらあるフローチャート証明から別のフローチャート証明へと発展的に考えていく機会が提供される。

例えば、証明問題(図8)の正答は五種類あり、問題文下のマーク「☆」は正答の種類数を表している。正解を解答すると、判定後に☆マークが黄色に変わり、このマークをクリックすると別のウィンドウで解答履歴が表示される。この場合、同じ合同条件を使うならどこを変えればよいか、他の合同条件にするならどうなるかと発展的に考える機会が生徒に提供される。

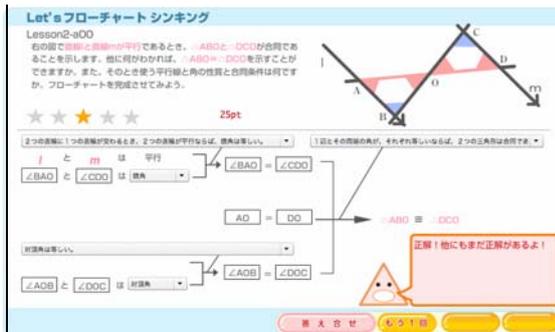


図8 ☆(正解数)と学習履歴の明示

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2件)

- ① 宮崎紀枝他、地域保健活動におけるパートナーシップ：概念分析、日本地域看護学会誌、44-49、2009、査読有
- ② Miyazaki, M., Cognitive Incoherence of Students Regarding the Establishment of Universality of Propositions through Experimentation/Measurement, International Journal of Science and Mathematics Education, 6(3), 533-558、2008、査読有

[学会発表](計 8件)

- ① Miyazaki, M. & Yumoto, T., Teaching and learning a proof as an object, Proceedings of the 19th the International Commission on Mathematical Instruction, ICMI Study 19 Conference, Proof and proving in mathematics education, 76-81、2009、
- ② 宮崎樹夫、学校数学における証明の基礎的学習の諸相を整理する枠組みの構築：証明の構造、証明する活動、証明の機能に焦点をあてて、日本数学教育学会第42回数学教育論文発表会論文集、601-606、2009、
- ③ 宮崎樹夫、茅野公穂他、我が国の数学教育における証明研究の課題と展望、日本数学教育学会第42回数学教育論文発表会論文集、64-69、2009、
- ④ 宮崎樹夫、中学校数学におけるフローチャート証明の学習支援システムの開発：誤りの特徴に応じた修正促進に着目して、日本

- 科学教育学会第33回年会、2009、
- ⑤ 宮崎樹夫、中学校数学におけるフローチャート証明の学習支援システムの開発、日本科学教育学会第32回年会、2008、
- ⑥ 宮崎樹夫、学校数学における証明に関する研究：証明の学習の諸相に着目して、日本数学教育学会第40回数学教育論文発表会論文集、649-654、2007、
- ⑦ K. Chino, T. Morozumi, H. Arai, F. Ogihara, Y. Oguchi, & M. Miyazaki. The effects of "spatial geometry curriculum with 3D DGS" in lower secondary school mathematics, Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp.137-144: Seoul National University (Korea)), 2007
- ⑧ Miyazaki, M., Arai, H., Chino, K., Ogihara, F., Oguchi, Y., & Morozumi, T. Development of web environment for lower secondary school mathematics teachers with 3D dynamic geometry software. In Novotna, J., Moraova, H., Kratka, M., & Stehlikova, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, p. 409, 2006, Prague: PME.

[図書] (計 2件)

- ① 宮崎樹夫他、図形概念と操作、『算数科教育研究』(第4章第1節)、学芸図書出版、2010、pp.41-49
- ② 宮崎樹夫、新井仁、荻原文弘、小口祐一、茅野公穂、両角達夫、空間図形の不思議な世界：3次元動的幾何ソフトならここまでできる、『新世紀型理数科系教育の展開研究 授業実践のためのすぐ使える新コンテンツ・カリキュラム：より幅広い活用を願って』(第2章第2節)、Retrieved December 10, 2007, from http://nime-glad.nime.ac.jp/program/search/pdf/a03-all_ver3.pdf.

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮崎 樹夫 (MIYAZAKI MIKIO)
信州大学・教育学部・教授
研究者番号：10261760

(2) 研究分担者

岩永 恭雄 (IWANAGA YASUO)
信州大学・教育学部・教授
研究者番号：80015825

茅野 公穂 (CHINO KIMIHO)
信州大学・教育学部・准教授
研究者番号：20400658

宮崎 紀枝 (MIYAZAKI TOSHIE)
佐久大学・看護学部・准教授
研究者番号：50349172

伊藤 武廣 (ITO TAKEHIRO)
信州大学・教育学部・教授
研究者番号：00015827

(3) 連携研究者

なし