様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22 年　5 月　7 日現在

研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2006　～　2009
課題番号：18340003
研究課題名（和文）　代数的サイクルのホッヂ理論的および数論的研究

研究課題名（英文）　Hodge theoretic and arithmetic aspects of algebraic cycles

研究代表者
斎藤　秀司（Saito Shuji）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号　：50153804

研究成果の概要（和文）:
当該研究は次の２つの部門からなる.
(I) 代数的サイクルの Hodge 理論的研究,
(II) 代数的サイクルの数論的研究.

以下，特に部門(II)に関連する成果ついて説明する．部門(I)の成果については，研究成果において説明する.

モチフィックコホモロジーとは, 代数体の整数環のイデアル類群や単数群, 代数多様体の Chow 群などを一般化したもので，数論的多様体の L-関数とも密接に関連する重要な研究対象である. これにたいする重要な未解決問題として数論的多様体のモチフィックコホモロジーの有限性予想がある．これは，代数体のイデアル類群が有限であること，あるいは代数体の整数環の単数群が有限生成であるという古典的な基本定理の高次元版である．この予想については，これまで上述１次元の場合を除いて殆ど肯定的な結果はなかった．当該研究の最初の成果として，この問題に対する一般的なアプローチを発見した．基本的なアイデアは上述の予想を加藤予想と関係付けることである．加藤予想とは，上述の問題とはまったく別のコンテクストにおいて加藤和也氏により 1986 年に提出された予想である．加藤氏は，有限体上の射影的で滑らかな多様体 X，あるいは整数環上の regular proper flat なスキーム X にたいし，ある数論幾何的な不変量を定義して，これが消えていることを予想した．X が有限体上の曲線，あるいは代数体の整数環のスペクトラムの場合の加藤予想は，有限体上の一変数関数体あるいは代数体 K のブラウアー群に関する古典的類体論の基本事実(K上の中心的単純環にたいする Hasse 原理)に同値である．当該研究では，加藤予想を「適当なスキームの圏上で定義される一般的なホモロジー理論に付随する Bloch-Ogus スペクトラル系列の E^2 項の適当な条件のもとでの消滅定理」という一般的枠組みにおいて考察することにより，特異点の解消を認めたうえで，有限体の多様体にたいする加藤予想を解決することに成功した．一方，最近 Gabber は de Jong による alteration を精密化することに成功した．alteration の次数をあらかじめ固定した(標数と異なる)素数と素に取ることが可能であることを示したのである．当該研究の次の段階の成果はこれを用いることにより，有限体の多様体にたいする加藤予想の標数と素な部分を特異点の解消の仮定なしに示すことに成功したことである.

研究成果の概要（英文）:
The research consists of three parts:

(I) Finiteness of motivic cohomology,
(II) Study of algebraic cycles by using the p-adic Hodge theory,
(III) Study of algebraic cycles by using the Hodge theory.

In what follows we explain a result related to (I).
We report on our result on the Kato conjecture for varieties over finite fields.By the last year, we have proved the conjecture by assuming resolution of singularities. This year we succeeded in removing the assumption by replacing it with Gabber's refined alteration.

Motivic cohomology of arithmetic schemes is an important object to study in arithmetic geometry. It includes the ideal class group and the unit group of an algebraic number field, and the Chow groups of algebraic varieties.It is closely related to the L-functions of algebraic varieties over a finite field or an algebraic number field. One of the important open problem is the conjecture that motivic cohomology of arithmetic schemes should be finitely generated, which generalizes the known finiteness results on the ideal class group and the unit group of an algebraic number field. There has been only few results on the conjecture except the one-dimensional case (namely the case of integer rings of an algebraic number field or curves over a finite field).

In a joint work with U. Jannsen we related the problem to a conjecture of Kato on the acyclicity of a certain complexes of Bloch-Ogus type, which is a natural generalization to higher dimensional schemes of the Hasse principle for the Brauer group of a global field, a fundamental theorem in number theory. We were able to prove the Kato conjecture for varieties over finite fields assuming resolution of singularities, which ensured that certain motivic cohomology with finite coefficient of varieties over finite fields is finite.

Recently Gabber refined de Jong's result by proving the existence of an alteration whose degree is prime to a given prime different from the characteristic p of the finite field. I have succeeded in removing the assumption of resolution of singularities in the previous work with Jannsen to show the prime-to-p part of the Kato conjecture unconditionally.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	2, 400, 000	720, 000	3, 120, 000
2007 年度	2, 000, 000	600, 000	2, 600, 000
2008 年度	2, 000, 000	600, 000	2, 600, 000
2009 年度	2, 000, 000	600, 000	2, 600, 000
年度			
総　計	8, 400, 000	2, 520, 000	10, 920, 000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数的サイクル，モチフィックコホモロジー，Chow 群，高次 Chow 軍，Abel の定理，Hodge 理論，p 進 Hodge 理論，高次元類体論

１．研究開始当初の背景
研究の主眼である代数的サイクルとは，代数多様体(あるいはもっと一般にスキーム) X 上の既約閉部分多様体(あるいは既約閉部分スキーム)たちの整数を係数とする有限和である．代数的サイクル全体のなす群を有理同値で割った群は Chow 群と呼ばれる．その研究の歴史は長く，その重要性は代数幾何のみならず整数論においても深く認識されている．たとえば，リーマン面上の代数的サイクルは 19 世紀の複素関数論の重要な研究対象であった．これに関するアーベルの定理は 19 世

紀の複素関数論の金字塔である．一方，20世紀初頭に発展した代数的整数論においての重要な研究対象である代数体のイデアル類群は，代数体の整数環のスペクトラムのChow 群として解釈することが可能で，その意味で代数的サイクルの研究は整数論とも深く関係するものである．このように代数的サイクルは数学のさまざまな分野に関連する興味深い研究対象でその研究の歴史は長い．

２．研究の目的

研究目的を一言で述べるなら，「代数的サイクルの多角的な側面からの研究」である．当該研究では，代数的サイクルを次の 2 つの部門に大きく分けて研究する．

(I) 代数的サイクルの Hodge 理論的研究，

(II) 代数的サイクルの数論的研究．

部門(I)の目標は 19 世紀の複素関数論の金字塔である Abel の定理を高次元化して，高次元複素多様体上の“代数的サイクルを周期積分により統制する”ことである．これは代数幾何学における最も深遠な問題の一つといって過言ではないであろう．Abel の定理とは Riemann 面 X 上の因子にたいしそれが X 上の有理型関数の因子となるための必要十分条件を X 上の正則な微分形式の積分を用いて与える．Abel の定理の高次元化とは“高次元代数多様体 X 上の代数的サイクルにたいし周期積分を使った Hodge 理論的な不変量を探し出し，これによりサイクルが有理同値であることを判断する”と言う問題に他ならない．この問題への重要な第一歩が Griffiths が 60 年代の終わりに定義した Abel-Jacobi 写像である．これはコンパクトで滑らかな複素数体上の代数多様体の Chow 群から，中間 Jacobi 多様体と呼ばれる複素トーラスへの写像である．余次元 1 の代数的サイクルにたいして Griffiths の Abel-Jacobi 写像が同型であることが示されている．これは先に延べた Abel の定理の自然な一般化である．しかし余次元が 2 以上の場合は様相が一変する．1968 年 Mumford は，幾何種数が 0 でない曲面 X にたいし，余次元 2 の Chow 群は，複素トーラスのような通常の幾何学的構造で統制するのが不可能なほど巨大であって，とくに Griffiths の Abel-Jacobi 写像は巨大な核をもつことを示した．これは Chow 群の表現不可能性定理と呼ばれる．当該研究の部門(I)の目的は，Griffiths の Abel-Jacobi 写像の核を捉える「高次 Abel-Jacobi 写像」を Hodge 理論を用いて定義し，これにより Abel の定理の高次元化を構築することである．

部門(II)の主な研究対象は数論的多様体の Chow 群およびモチフィックコホモロジーである．代数多様体あるいはもっと一般に Dedekind 環上の有限型分離的スキーム X にたいし, Chow の自然な一般化である Bloch の高次 Chow 群が定義される．モチフィックコホモロジーは高次 Chow 群を使って定義される．Voevodsky によるコホモロジー論的な定義や Morel-Voevodsky によるホモトピー論的な定義もある(もともと Grothendieck が「普遍的なコホモロジー理論」としてその存在を予見していた). 現在これについて世界的に活発な研究が行われている．その理由のひとつは，数論的多様体のゼータ関数の特殊値に関するいくつかの重要な予想(Tate 予想, Birch-Swinnerton-Dyer 予想, Lichtenbaum 予想，Beilinson 予想，Bloch-加藤予想)において中心的役割を果たすことにある．

当該研究の部門(II)の研究目的は，整数環上の有限型スキームのモチフィックコホモロジーの有限性(つまりこれらが有限生成アーベル群である)の予想である. この予想の特別な場合は，代数体のイデアル類群が有限で，単数群が有限性生成であるという古典的な定理に相当する．有限性予想はゼータ関数の特殊値の予想の大きな部分を占める重要な未解決問題で，1 次元の場合(代数体の整数環あるいは有限体上の曲線)を除いて殆ど結果が知られていなかった．　この重要な予想への貢献を与えることが研究目的である．

３．研究の方法

部門(I)の研究目的に迫る最初のステップとして，Chow 群上のフィルターを定義する．これは Bloch-Beilinson による“混合モチーフの哲学”に基づいてその存在が予想されていたもので，この有力な候補を一般の場合に無条件に定義したのは当該研究においてが初めてである．以後これを Bloch-Beilinson フィルーターと呼ぶ．第二のステップとして，上述の Chow 群上のフィルーターの深いレベルにあるサイクルを捉える力のある Hodge 理論的な不変量を定義する．具体的には，高次 Abel-Jacobi 写像を Hodge 理論的に定義する. これは Griffiths の Abel-Jacobi 写像の一般化となるものである．Mumford の定理により，高次 Abel-Jacobi 写像の像となる空間は無限次元の空間でなくてはならないが，複素数体を有理数体上の(無限次元)の多様体とみなし，複素多様体をその上の多様体の族とみなす，という独創的なアイデアにより問題に進展を与える．第三のステップとして，Griffiths の Abel-Jacobi 写像では捉えられなかった様々な代数的サイクルが高次 Abel-Jacobi 写像という新しい Hodge 理論的不変量により捉えられることを示す.

部門(II)

本研究代表者の従来の研究において，この問

題に対するいくつかの貢献を行ってきた．ひとつは高次元類体論で，これは高木-Artin の古典的類体論を，代数的 K 理論を用いて幾何学的類体論として高次元化した理論である．これにより整数環上の有限型スキーム X にたいし，X 上の 0 次 Chow 群が有限生成であることを示した．従来の研究におけるもうひとつの成果は，代数体上の多様体 の余次元 2 の Chow 群のねじれ部分の有限性を示す一般的なアプローチを p 進 Hodge 理論を用いて開発したことである．当該研究では，高次元類体論で用いられた手法を発展させ，p 進 Hodge 理論などの新しい手法を用い，さらに有効な新理論の開発(付値環上のスキームに対する Lefschetz の理論の一般化)を行いつつ，モチフィックコホモロジーの有限性予想にたいする一般的なアプローチの枠組みを構築する．

４．研究成果

(1) 部門(I)に関連した成果について説明する．ホッヂ理論における無限小変形の方法は代数幾何において様々な成果をもたらしている．もともとのアイデアは Griffiths によるもので，射影空間内の超曲面の族のコホモロジーから生ずるホッヂ構造の無限小変形をヤコビ環を用いて計算して，これをトレリ問題に応用した．その後もホッヂサイクルに対する Noether-Lefschetz 問題や代数的サイクルへの応用など様々な成果がこの方法によりもたらされている．当該研究ではこの方法を，「Beilinson-Hodge 予想にたいする Noether-Lefschetz 問題の類似」へ応用した．Beilinson-Hodge 予想とは，非特異コンパクトな複素多様体上のホッヂサイクルにたいするホッヂ予想のコンパクトでない複素多様体にたいする類似の予想である．ホッヂ予想は所謂ホッヂサイクルが代数的サイクルのコホモロジー類であると予想する．コンパクトでない複素多様体のコホモロジーにたいしても Deligne の混合 Hodge 構造の理論によりホッヂサイクルの類似(Beilinson-Hodge サイクル)が定義される．この予想はこれらがレギュレーター写像により Bloch の高次代数的サイクルからくると予想するものである．予想は１次元(コンパクトリーマン面)の場合には成立することが知られている．実際この場合にはアーベルの定理に同値である．本研究では以下の成果を得た．論文８において，射影空間内の完全交差多様体の族に対して Beilinson-Hodge サイクルにたいする Noether-Lefschetz 問題の類似を考察して，Noether-Lefschetz locus のモヂュライ空間での余次元の評価を得た．これにより一般の完全交差多様体に対しては Beilinson-Hodge 予想が成立することを示した．論文４においては，上述の Noether-Lefschetz locus をある場合に詳しく研究し，最大次元をもつ既約成分が無限個存在することを発見し，それらを完全に決定した．

(2) 部門(I)と(II)の双方に関連した成果について説明する．この成果は論文３において発表された．この研究においては，Hodge 理論という複素多様体にたいする理論が，数論的な問題にたいしいかに有効な役割を果たすかを示している．問題となるのは，p 進体上の曲面 X で，その 0 次 Chow 群のねじれ部分が無限群であるような例を構成することである．X が代数体上定義されている場合には，Chow 群 は有限生成であると予想され，これに関して多くの研究がなされている．定義体が p 進体の場合にもこれまで 0 次 Chow 群のねじれ部分は有限であると期待されており，いくつかの特別な場合にそれが正しいことが示されていた．我々の結果はこの予想にたいする最初の反例を与えるものでこの分野の研究に全く新しい見地をもたらした．証明の核心部分は，Bloch-加藤が提出したある予想(X のモチフィックコホモロジーからエタールコホモロジーへのレギュレーター写像の像を p-進 Hodge 理論的に特徴付ける予想)の局所体上の類似の反例を与えることである．先行する佐藤周友氏との共同研究(論文 2)において，この類似予想が成り立てば 0 次 Chow 群のねじれ部分の有限性が従うことが示されていた．Bloch-加藤予想の局所体上の類似の反例の構成は，混合 Hodge 加群の理論を用いることにより X に付随する Hodge 構造の変動から生ずる de Rham 複体の完全性に帰着され，最終的には Hodge 理論における無限小変形の方法を用いてこの問題を解決する．

(3) 部門(II)に関連した成果について説明する．数論的代数多様体上の代数的サイクルの研究の重要な手段として，エタールサイクル写像がある．これは Chow 群や高次 Chow 群という計算が困難なものから，エタールコホモロジーというある程度計算可能なものへの写像である．これが同型あるいは単射であれば，Chow 群や高次 Chow 群の構造について，その有限性を初めとする多くの重要な情報をもたらしてくれる． このような単射性の結果は殆ど知られておらず，それどころか代数体あるいは局所体上の多様体の場合にサイクル写像が単射でない例も知られており，状況は混沌としていた．論文１において代数体あるいは局所体の整数環上の正則固有平坦なスキーム X にたいするサイクル写像を考察することにより，この問題に対するまったく新しい見地を開き，その単射性に関

する結果を得た.
最初の結果は余次元２のサイクル写像の単射性が Bloch−加藤予想から従うことを示し，特に X の一般ファイバーの幾何種数がゼロの場合にはサイクル写像が単射であることを示した.
次に X が局所体の整数環 R 上の正則固有平坦なスキームとするとき，X 上の 1−サイクルの Chow 群 $CH\_1(X)$ にたいするサイクル写像が，R の剰余体と素な部分に対しては同型であることを示した．これから $CH\_1(X)$ にたいする新しい有限性定理を得た.

(4) 部門(II)に関連した成果について説明する．研究目的の部門(II)において述べたモチフィックコホモロジーの有限性予想についての成果である．この予想については，これまで上述１次元の場合を除いて殆ど肯定的な結果はなかった．当該研究の最初の成果として，この問題に対する一般的なアプローチを発見した．基本的なアイデアは上述の予想を加藤予想と関係付けることである．加藤予想とは，上述の問題とはまったく別のコンテクストにおいて加藤和也氏により 1986 年に提出された予想である．加藤氏は，有限体上の射影的で滑らかな多様体 X, あるいは整数環上の regular proper flat なスキーム X にたいし，ある数論幾何的な不変量を定義して，これが消えていることを予想した．X が有限体上の曲線，あるいは代数体の整数環のスペクトラムの場合の加藤予想は，有限体上の一変数関数体あるいは代数体 K のブラウアー群に関する古典的類体論の基本事実(K上の中心的単純環にたいする Hasse 原理)に同値である．当該研究では，加藤予想を「適当なスキームの圏上で定義される一般的なホモロジー理論に付随する Bloch-Ogus スペクトラル系列の E^2 項の適当な条件のもとでの消滅定理」という一般的枠組みにおいて考察することにより，特異点の解消を認めたうえで，有限体の多様体にたいする加藤予想を解決することに成功した．一方，最近 Gabber は de Jong による alteration を精密化することに成功した．alteration の次数をあらかじめ固定した(標数と異なる)素数と素に取ることが可能であることを示したのである．当該研究の次の段階の成果はこれを用いることにより，有限体の多様体にたいする加藤予想の標数と素な部分を特異点の解消の仮定なしに示すことに成功したことである.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　８件）

1. S. Saito and K. Sato, A finite theorem for zero-cycles over p-adic fields, to appear in Annals of Mathematics (2009)

2. S. Saito and K. Sato, A p-adic regulator map and finiteness results for arithmetic schemes, to appear in Documenta Math. (2010)

3. M. Asakura and S. Saito, Surfaces over a p-adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles, Algebra and Number Theory **1** (2008), 163--181

4. M. Asakura and S. Saito, Maximal components of Noether-Lefschetz locus for Beilinson-Hodge cycles, Math. Ann. **341** (2008), 169--199

5. J. Lewis and S. Saito, Algebraic cycles and Mumford-Griffiths invariants, to appear in Amer. J. of Math. (2009)

6. M. Asakura and S. Saito, Beilinson's Hodge conjecture with coefficient for open complete intersections, London Math. Society Lecture Note Series **344** (2007), 3-37

7. M. Asakura and S. Saito, Generalized Jacobian rings for open complete intersections, Math. Nachr. **279** (2006), 5--37

8. M. Asakura and S. Saito, Noether-Lefschetz locus for Beilinson-Hodge cycles I, Math. Zeit. **252** (2006), 251--237.

〔学会発表〕（計 11 件）

1. Shuji Saito, Weak Bloch-Beilinson conjecture for zero-cycles over local fields,
Cohomological approaches to rational points, 2006 年 3 月, MSRI, Berkeley, USA.

2. Shuji Saito, Noether-Lefschetz problem for Beilinson-Hodge cycles on open surfaces,
Antalya Algebra Days VIII, 2006 年 5 月, Antalya, Tuekey.

3. Shuji Saito, Finiteness results for motivic cohomology of arithmetic schemes,
Arithmetic Geometry, 2006 年 9 月, RIMS, Kyoto, Japan.

4. Shuji Saito, Surfaces over a p-adic

field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles,
Algebraic cycles, motives and A^1-homotopy theory over general bases, 2007年 2月, Regensburg, Germany.

5. Shuji Saito, Surfaces over a p-adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles,
Workshop on the geometry of holomorphic and algebraic curves in complex algebraic varieties,
2007年 5月, CRM, Montreal, Canada.

6. Shuji Saito, Surfaces over a p-adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles,
Algebraic K-theory and its Applications, 2007年 6月, ICTP, Trieste, Italy.

7. Shuji Saito, A conjecture of Colliot-Th'el`ene on zero-cycles over local fields,
G'eom'etrie arithm'etique et vari'et'es rationnelles, 2007年 12月, CIRM, Luminy, France.

8. Shuji Saito, Roitman's theorem for 1-cycles on arithmetic schemes,
Algebraic Geometry Seminar, 2008年 7月, University of Munich, Munich, Germany.

9. Shuji Saito, Finiteness results for motivic cohomology of arithmetic schemes,
Quadratic forms, linear algebraic groups and cohomology, 2009年 1月,
University of Hyderabad, Hyderabad, India.

10. 斎藤秀司, Cohomological Hasse principle, finiteness of motivic cohomology, special values of
zeta functions, 代数学シンポジウム(基調講演), 2009年8月5日, 明治大学, 東京

11. 斎藤秀司, 類体論の高次元化と高次化, 高木貞治５０年祭記念学術講演会, 2009 年 12月9日, 東京大学数理科学研究科, 東京

６．研究組織
(1)研究代表者
( )

研究者番号：

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：