

## 科学研究費補助金研究成果報告書

平成22年 4月 28日現在

研究種目：基盤研究 (B)  
 研究期間：2006 ～ 2009  
 課題番号：18340007  
 研究課題名 (和文) 無限対称性の代数解析  
 研究課題名 (英文) Algebraic Analysis of Infinite Symmetry  
 研究代表者  
 柏原 正樹 (KASHIWARA MASAKI)  
 京都大学・数理解析研究所・教授  
 研究者番号：60027381

## 研究成果の概要 (和文)：

表現論の幾何学的、圏論的研究をおこなった。B型アフィンhecke環の表現論が、対称結晶基底という組み合わせ論的对象により記述できることを予想した。

又、シンプレクティック多様体上の関数層の変形量子化を研究し、曲面のヒルベルト概型の関数層の変形量子化をもちいて有理 Cherednik 代数の表現論が幾何的に表現できることを示した。また、さらに、無限次元アフィン旗多様体の K-群を多項式で表すことに成功した。

## 研究成果の概要 (英文)：

I have studied representation theory via geometric methods and categorical methods. I conjectured that the representation theory of affine Hecke algebras of type B is described by the symmetric crystals which we introduced for this purpose. I also studied deformation quantizations of the structure sheaf of symplectic manifolds, and applied this theory to the study of the representation theory of rational Cherednik algebras via a deformation quantization of the Hilbert scheme of surfaces. I also succeeded to express the K-theory of the flag manifolds of affine Lie algebras by the polynomial rings.

## 交付決定額

(金額単位：円)

|        | 直接経費       | 間接経費      | 合計         |
|--------|------------|-----------|------------|
| 2006年度 | 4,000,000  | 1,200,000 | 5,200,000  |
| 2007年度 | 3,400,000  | 1,020,000 | 4,420,000  |
| 2008年度 | 3,400,000  | 1,020,000 | 4,420,000  |
| 2009年度 | 3,400,000  | 1,020,000 | 4,420,000  |
| 年度     |            |           |            |
| 総計     | 14,200,000 | 4,260,000 | 18,460,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：表現論、量子群、結晶基底、変形量子化、アフィンhecke環

### 1. 研究開始当初の背景

表現論は、幾何学、圏論等との関連をもちながら、量子群、アフィンhecke環などの新しい代数を導入しながら発展してきている。旗多様体の幾何と量子群とその表現の関係、ヒルベルト概型のコホモロジー群のハイゼンベルグ代数の作用をもちいた研究などはその例である。

一方、Lascoux-Leclerc-Thibon は、A型hecke環の表現がA型のアフィン量子群の結晶基底で記述できるだろうという驚くべき予想をたてた。これはその後、有木によってA型アフィンhecke環に関する予想に一般化されて証明された。しかし、その他のhecke環については、類似の予想はなかった。

### 2. 研究の目的

表現論を幾何的、圏論的に研究する事を目的とした。特にLascoux-Leclerc-Thibon-Arikiによる、A型アフィンhecke環とA型アフィン量子群の結晶基底との関係を他のアフィンhecke環に拡張することを一つの目標とした。

### 3. 研究の方法

榎本氏とともにB型アフィンhecke環の表現論を研究した。B型アフィンhecke環の表現論については、すでにVanessa Miemietzが、変形単純根作用を定義しており、その結晶構造の存在は知られていた。それを多くの例を調べることにより対称結晶基底の概念を導入した。

また、一般化されたカツムーディ環の結晶基底に関する研究を、Seok-Jin Kang, Schiffmannとの共同研究によりおこなった。無限次元アフィン旗多様体のK-群に関する研究はMark Shimozonoとの共同研究との共

同研究でおこなった。無限次元アフィン旗多様体は2種類ある。一つは、Kac-Petersonによる、有限次元多様体のunionとして表すものであり、もうひとつはKashiwaraによる無限次元概型として書き表す方法である。前者による方法でK群を考えることは、Shrawan Kumarによって行われたが後者による方法では考えられてこなかった。前者のK群と後者のK群とは、互いに双対の関係にあり、後者の方が自然であり、この構造をしらべた。

### 4. 研究成果

(1) 榎本氏とともにB型アフィンhecke環の表現論を研究した。その既約表現を記述するため、対称結晶基底の概念を導入した。対称結晶基底は、ディンキン図形とその対合が与えられたとき、ある代数が対応し、その既約表現に対応する組み合わせ論的対象である。さらにB型アフィンhecke環の既約表現が対称結晶基底をもちいて記述されるだろうという予想を提出した。

また、A型ディンキン図形に対応する場合に対称結晶基底の存在をPBW基底をもちいることにより証明した。

また、Vanessa MiemietzとともにD型アフィンhecke環の場合に、対称結晶基底の概念を導入しそれをもちいた既約表現の記述を予想した。

(2) P. Schapira氏と複素多様体上の関数の層の変形量子化を研究した。

とくにその対応理論を確立し、加群の有限性に関する判定条件を与えた。さらに、変形量子化における双対定理を確立するとともに、Hochschild類をもちいた指数定理をしめした。

この理論を以下(3)に述べるように、表現論に応用した。

(3) Rouquier 氏とともに有理 Cherednik 代数の表現論を幾何学的に研究した。

まづ曲面のヒルベルト概型上に構造層の変形量子化となる環の層を構成した。さらにこの環にフロベニウス構造を与え、この環の加群の圏が、有理 Cherednik 代数の表現のなす圏と同値であることをしめした。

(4) 一般化されたカツムーディ環に対して、その結晶基底を籓多様体の幾何学をもちいて、構成した。それによれば、結晶基底は、そのラグランジュ部分多様体に対応し、変形単純根作用素は、代数的対応により与えられる。但し、籓多様体全体を考えるのではなく、その開集合に制限したことが鍵となる。

(Seok-Jin Kang, Schiffmann との共同研究)。

(5) 無限次元アフィン旗多様体の  $K$ -群は、シューベルト多様体に対応する基底をもつが、これを多項式で表すことに成功した。有限次元旗多様体の場合にはこの多項式は Grothendieck 多項式と呼ばれるが、これは、一意的に決まらない。これにたいして、無限次元アフィン旗多様体の場合は、Grothendieck 多項式にあたるものはあるクラスの分母をもつが一意的に決まることをしめした。(Mark Shimozono との共同研究)。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

① M. Kashiwara and Mark Shimozono, Equivariant  $K$ -theory of affine flag manifolds and affine Grothendieck

polynomials, *Duke Math. J.*, 査読有, **148** (2009), no. 3, 501–538.

② Seok-Jin Kang, M. Kashiwara and Olivier Schiffmann, Geometric construction of crystal bases for quantum generalized Kac-Moody algebras, *Adv. Math.*, 査読有, **222** (2009), no. 3, 996–1015.

③ M. Kashiwara and Pierre Schapira, Modules over deformation quantization algebroids: an overview, *Lett. Math. Phys.*, 査読有, **88** (2009), no. 1-3, 79–99.

④ Naoya Enomoto, and M. Kashiwara, Symmetric crystals for  $gl_{\infty}$ , *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 査読有, **44** (2008), no. 3, 837–891.

⑤ M. Kashiwara, Equivariant derived category and representation of real semisimple Lie groups, *Representation theory and complex analysis*, 137–234, *Lecture Notes in Math.*, 査読有, vol. **1931**, Springer, Berlin, 2008.

⑥ M. Kashiwara, Toshiki Nakashima, Masato Okado, Affine geometric crystals and limit of perfect crystals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 査読有, **360** (2008), no. 7, 3645–3686.

⑦ M. Kashiwara and Vanessa Miemietz, Crystals and affine Hecke algebras of type  $D$ , *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 査読有, **83** (2007), no. 7, 135–139.

⑧ Naoya Enomoto, and M. Kashiwara,  
Symmetric crystals and affine Hecke  
algebras of type B, Proc. Japan Acad. Ser.  
A Math. Sci., 査読有, **82** (2006), no. 8,  
131--136.

[学会発表] (計 3 件)  
発表者はすべて柏原正樹

① Crystal theory and LLTA theory,  
Southeastern Lie Theory Workshop on  
Combinatorial Lie Theory and Applications,  
2009年10月9日, North Carolina State  
University (Raleigh, USA)

② Affine Hecke algebras of type B and  
Symmetric crystals, London Mathematical  
Society Durham Symposium (Combinatorial  
and Geometric Structures in  
Representation Theory), 2009年7月16日,  
Durham University (England)

③ Holonomic modules on symplectic  
manifolds, Algebraic Analysis and  
Deformation Quantization,  
2009年6月26日, Scalea (Italy)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

柏原 正樹 (KASHIWARA MASAKI)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号：60027381

### (2) 研究分担者

有木 進 (ARIKI SUSUMU)  
京都大学・数理解析研究所・准教授  
研究者番号：40212641  
(H20→H21：連携研究者)

Kirillov Anatol (KIRILLOV ANATOL)  
京都大学・数理解析研究所・准教授  
研究者番号：30346035  
(H20→H21：連携研究者)

三輪 哲二 (MIWA TETSUJI)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：10027386  
(H20→H21：連携研究者)

中島 啓 (NAKAJIMA HIRAKU)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号：00201666  
(H20→H21：連携研究者)

内藤 聡 (NAITO SATOSHI)  
筑波大学・数理解析研究所・准教授  
研究者番号：60252160  
(H20→H21：連携研究者)

兼田 正治 (KANEDA MASAHARU)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：60204575  
(H20→H21：連携研究者)

谷崎 俊之 (TANISAKI TOSHIYUKI)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：70142916  
(H20→H21：連携研究者)

中島 俊樹 (NAKASHIMA TOSHIKI)  
上智大学・理工学部・教授  
研究者番号：60243193  
(H20→H21：連携研究者)

中屋敷 厚 (NAKAYASHIKI ATSUSHI)  
九州大学・大学院数理額研究院・准教授  
研究者番号：10237456  
(H20→H21：連携研究者)

鈴木 武史 (SUZUKI TAKESHI)  
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授  
研究者番号：30335294  
(H20→H21：連携研究者)