

平成 22 年 5 月 7 日現在

研究種目：基盤研究（B）
 研究期間：2006～2009
 課題番号：18340008
 研究課題名（和文）グレブナー基底の理論的有効性と実践的有効性の探究
 研究課題名（英文）The Study of theoretical aspects and practical aspect on Gröbner Bases
 研究代表者
 日比 孝之（HIBI TAKAYUKI）
 大阪大学・大学院情報科学研究科・教授
 研究者番号：80181113

研究成果の概要（和文）：本基盤研究では、計算可換代数、計算代数解析、計算代数統計、代数的アルゴリズムなど、グレブナー基底を巡る複数の研究分野に属する研究者から構成される研究プロジェクトを組織し、永続性と国際性を考慮し、グレブナー基底の理論的有効性と実践的有効性の具象的探究を強力に推進し、グレブナー基底の現代的理論を進化させることに成功した。本研究は JST CREST 研究「現代の産業社会とグレブナー基底の調和」に継承されている。

研究成果の概要（英文）：With taking the persistence and the internationalization into consideration, in collaboration with many researchers in various field including computational commutative algebra, computational algebraic analysis, computational algebraic statistics as well as algebraic algorithm, this research project strongly developed the study on the theoretical effectivity and practical effectivity of Gröbner bases and succeeded in establishing the foundations of the modern theory of Gröbner bases. At present, in order for our research group to be one of the strongest international footholds on the theoretical and practical research of Gröbner bases, the CREST research project "Harmony of Gröbner bases and the modern industry society," whose team leader is Takayuki Hibi, which is supported by JST (Japan Science and Technology Agency) follows this research project.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
平成18年度	6,100,000	1,830,000	7,930,000
平成19年度	2,500,000	750,000	3,250,000
平成20年度	2,500,000	750,000	3,250,000
平成21年度	2,500,000	750,000	3,250,000
総計	13,600,000	4,080,000	17,680,000

研究分野：計算可換代数

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：グレブナー基底、計算可換代数、計算代数解析、計算代数統計、
 凸多面体、イニシャルイデアル、マルコフ基底、分割表

1. 研究開始当初の背景

グレブナー基底の「理論」と「実践」の研究は、欧米諸国とともに、我が国においても、

純粋数学、応用数学、情報数学の様々な分野で活発に展開されている。しかしながら、現状は、個々の研究グループが独自の問題意識

で研究を展開しており、「理論」のグループと「実践」のグループが共同研究を推進するための組織的な企画は皆無である。本基盤研究の研究組織は、従来の研究領域の壁を越える画期的なものである。グレブナー基底の効率的計算という肥沃な研究領域を“土壌”に持ち、計算可換代数を“幹”とし、トーリックイデアルなどの“枝”を巡らせ、計算代数解析、計算代数統計という緑豊かな“葉”が広がる、そのような魅惑的な光景が本基盤研究の独創的な姿である。

2. 研究の目的

(1) 可換代数と代数幾何におけるグレブナー基底の果たす役割は [D. Cox, J. Little, D. O'Shea (著) 大杉英史, 北村知徳, 日比孝之 (訳) 「グレブナー基底 1, 2」シュプリンガー・フェアラーク東京 2000] が詳しい。他方、凸多面体の三角形分割とトーリック環の理論におけるイニシャルイデアルの有効性は [日比孝之「グレブナー基底」朝倉書店 2003] に展開されている。そのようなグレブナー基底の基礎研究は、概ね、完成している。可換代数における潮流は generic initial ideal (以下、Gin と略す) の研究に流れつつある。可換代数と代数幾何における Gin の基礎理論は [M. Green, Generic initial ideals, “Six Lectures on Commutative Algebra,” Birkhäuser, 1998, pp. 119--186] に解説されている。組合せ論における Gin (いわゆる algebraic shifting) は [J. Herzog, Generic initial ideals and graded Betti numbers, “Computational Commutative Algebra and Combinatorics” (T. Hibi, Ed.), Advanced Studies in Pure Math., Volume 33, 2002, pp. 75--120] が詳しい。いま、Gin の理論の飛躍的な進展を望むならば、豊富な計算例を蓄積し、それらの徹底した解析が前提となる。しかし、Gin の計算はきわめて難しく、Gin の系統的な研究は黎明期である。本基盤研究では、可換代数の従来の枠組に執着するのではなく、D加群、計算理論の研究者なども加え、Gin と algebraic shifting を巡る組織的な総括的研究を展開し、Gin を計算する効率的な方法を開拓するとともに、可換代数と組合せ論における Gin の独創的な世界を擁立する。将来の大きな課題の一つは、アルゴリズム的な着想による球面版 g 予想の肯定的な解決への挑戦である。

(2) トーリックイデアルの「理論」と「実践」は、計算代数解析、計算代数統計、組合せ論などにも深く関与する。たとえば、GKZ 超幾何微分方程式系、分割表のマルコフ基底、凸多面体の三角形分割などの議論では、トーリックイデアルが主役を担う。本基盤研究では、計算可換代数の範疇において構築された

理論を、計算代数統計、計算代数解析などに応用する斬新な路を探究する。

3. 研究の方法

(1) 本基盤研究は、平成 17 年度の科学研究費補助金 (基盤研究 C、企画調査) 「グレブナー基底の理論的有効性と実践的有効性に関する共同研究の企画調査」における調査の結果を踏襲した。

(2) 平成 18 年度の本基盤研究の推進は、研究代表者、齋藤恭司、竹村彰通、大阿久俊則、横山和弘が組織委員を務める、京都大学数理解析研究所の平成 18 年度のプロジェクト研究「グレブナー基底の理論的有効性と実践的有効性」と相俟って実施された。

(3) 凸多面体の組合せ論の展開に有益な道具である algebraic shifting の代数的基礎理論の構築とその g 予想への貢献を念頭に置き、計算可換代数における Gin の具象的研究を多角的に展開した。特に、海外共同研究者である Juergen Herzog との国際共同研究の一環として squarefree な単項式イデアルの Gin の研究を推進し、componentwise linear ideal などの理論を進化させた。

(4) トーリックイデアルの概念は、可換代数と代数幾何の計算可能な理論を、統計数学、整数計画、符号理論、三角形分割などに応用する魅惑的な路を提供する。計算代数統計における懸案の未解決予想の一つは、極小マルコフ基底が一意的に存在する、というマルコフ基底予想である。本基盤研究では、可換代数、計算代数統計の研究者が、分割表のマルコフ基底予想の肯定的な解決に挑戦した。

(5) 整数行列に付随し、トーリックイデアル、GKZ 超幾何方程式系、トーリック環の微分作用素環などが議論できる。このような整数行列に付随する D 加群の研究を、トーリックイデアルの可換代数を駆使し、アルゴリズム数学の視点も考慮に入れながら推進した。

(6) グレブナー基底の効率的計算は、永遠に未完成な、永遠に魅惑的な研究課題であり続ける。幾多の改良されたアルゴリズムがあるものの、グレブナー基底を計算するアルゴリズムは Buchberger アルゴリズムの着想の傘下であり、それを超えるものではない。本基盤研究においては、Buchberger アルゴリズムの着想とは全く視点を異にする効果的なアルゴリズムの開発も視野に入れ、グレブナー基底の効率的計算の研究を展開した。

4. 研究成果

(1) 平成 18 年度は、我が国および欧米諸国において分散的に展開され、蓄積されてきたグレブナー基底の「理論」と「実践」の研究成果を総括的に集大成し、平成 19 年度以降の具体的な研究方針を樹立することを課題とし、研究活動を展開した。平成 18 年度の本基盤研究の推進は、京都大学数理解析研

研究所の平成18年度のプロジェクト研究「グレブナー基底の理論的有効性と実践的有効性」と相俟って実施された。研究代表者と研究分担者は、プロジェクト研究の一環として開催されるセミナー、研究集会、国際会議などに参加し、従来の個別的な研究体制を永続的な国際共同研究に昇華させるため、欧米諸国の研究者との研究情報網を築くことに務めた。加えて、若手研究者育成の一環とし、「グレブナー基底夏の学校」を開催し、使用するテキスト「グレブナー基底の現在（いま）」（日比孝之、編集）を出版（数学書房、平成18年6月）した。

(2) 計算代数統計に現れるグレブナー基底の基礎理論の構築を強力に推進した。顕著な成果の一つは、Segre--Veronese 配置を一般化する nested 配置の概念を導入したことである。Segre--Veronese 配置のグレブナー基底は大学入試センターの科目選択問題の統計学的な分析を、マルコフ連鎖モンテカルロ法を使って実施する際に本質的な貢献をした。他方、nested 配置の概念は、グレブナー基底の理論を統計学に応用する範囲を著しく広げることが可能にし、計算代数統計の可換代数的側面の探究を進化させた。

(3) 統計学におけるサンプリングの手法の一つである sequentially sampling の代数的側面の研究を推進し、配置が very ample とはならないことを判定する効果的な代数的方法を開発し、その結果、分割表に現れる非正規な配置がすべて very ample ではないことを示すことに成功した。他方、非正規な配置があるが、しかし very ample となる自然な配置の構成は、今後の研究課題の一つとして残っている。

(4) グレブナー基底を代数的な勘と幾何学的な経験および手計算の腕力に頼って探す従来の原始的な方法を、何らかの創意工夫を凝らし、計算機のプログラムとして実装するための基礎的な研究を開始した。

(5) 分割表に付随する two way subtable sum problem の代数的研究と非正規配置の非 very ample 性の研究を踏襲し、nested 配置のトーリック環の正規性とトーリックイデアルのグレブナー基底を詳細に探究した。その結果、二次二項式から成るグレブナー基底の豊富な類を生産することに成功し、今後、計算代数統計のモデルの分析に多大なる貢献をすることが期待される。

(6) 計算代数統計における研究対象である conditional independence statement を代数的に解釈することから、有限グラフに付随する或る二項式イデアルを提唱し、その代数的諸性質を探究した。特に、そのグレブナー基底を具象的に研究し、その帰結の一つとして、CI ideal の著名な類が radical イデアルであることを、イニシャルイデアルのテク

ニックから証明することに成功し、CI ideal の幾何学的研究を推進させた。

(7) 凸多面体の代数的組合せ論におけるグレブナー基底の理論を展開し、単模超グラフの頂点被覆代数の総括的な研究を遂行するとともに、有限グラフの cut polytope の正規性が minor closed な性質であることを証明することに成功した。

(8) 弦グラフのベッチ数列と単体的複体の f 列の研究を実施し、弦グラフの edge ideal のベッチ数列を f 列とする単体的複体の存在を証明した。

(9) 整数 k と d で $0 \leq 2k \leq d$ を満たすものを固定するとき、 d 次元の Gorenstein Fano polytope P で、条件「 P の Ehrhart 多項式 $i(P, n)$ は d 個の異なる根を持つ； $i(P, n)$ は $2k$ 個の虚数根を持つ； $i(P, n)$ は $d - 2k$ 個の実数根を持つ；すべての虚数根の実部は $-1/2$ である；すべての実数根は开区間 $(-1, 0)$ に属する」を満たすものを構成した。

(10) ジェネリックイニシャルイデアルの具象的研究を推進し、algebraic shifting のベッチ数列に関する懸案の予想を肯定的に解決することに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計23件)

[1] J. Herzog, T. Hibi and H. Ohsugi, Unmixed bipartite graphs and sublattices of the Boolean lattices, J. Algebraic Combin. 30 (2009), 415--420. (査読有)

[2] H. Ohsugi and T. Hibi, Two way subtable sum problems and quadratic Gröbner bases, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 1539--1542. (査読有)

[3] S. Murai and T. Hibi, Algebraic shifting and graded Betti numbers, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), 1853--1865. (査読有)

[4] J. Herzog, T. Hibi and N. V. Trung, Vertex cover algebras of unimodular hypergraphs, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 409--414. (査読有)

[5] H. Ohsugi and T. Hibi, Quadratic Gröbner bases arising from combinatorics, Integer Points in Polyhedra---Geometry, Number Theory, Representation Theory, Algebra, Optimization, Statistics, Contemp. Math., 452, Amer. Math. Soc., 2008, pp. 123--138. (査読有)

[6] S. Murai and T. Hibi, Gotzmann ideals of the polynomial ring, Math. Z. 260 (2008), 629--646. (査読有)

[7] J. Herzog, T. Hibi, N. V. Trung and X. Zheng, Standard graded vertex cover algebras, cycles and leaves, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), 6231--6249. (査読有)

[8] S. Aoki, T. Hibi, H. Ohsugi and A. Takemura, Gröbner bases of nested configurations, J. Algebra 320 (2008), 2583--2593. (査読有)

[9] J. Herzog, T. Hibi, S. Murai, N. V. Trung and X. Zheng, Kruskal--Katona type theorems for clique complexes arising from chordal and strongly chordal graphs, Combinatorica 28 (2008), 315--323. (査読有)

[10] T. Hibi and P. Singla, Linear balls and the multiplicity conjecture, J. Algebra 319 (2008), 4372--4390. (査読有)

[11] J. Herzog, T. Hibi, S. Murai and Y. Takayama, Componentwise linear ideals with minimal or maximal Betti numbers, Ark. Mat. 46 (2008), 69--75. (査読有)

[12] S. Murai and T. Hibi, The depth of an ideal with a given Hilbert function, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 1533--1538. (査読有)

[13] T. Hibi, Gröbner basis techniques in algebraic combinatorics, Sémin. Lothar. Combin. 59 (2007/08), Art. B59a, 22 pp. (査読有)

[14] H. Ohsugi and T. Hibi, Toric ideals arising from contingency tables, Commutative Algebra and Combinatorics, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., 4, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2007, pp. 91--115. (査読有)

[15] S. Murai and T. Hibi, Maximal Betti numbers of Cohen--Macaulay complexes with a given f -vector, Arch. Math. (Basel) 88 (2007), 507--512. (査読有)

[16] J. Herzog, T. Hibi and N. V. Trung, Symbolic powers of monomial ideals and vertex cover algebras, Adv. Math. 210 (2007), 304--322. (査読有)

[17] S. Murai and T. Hibi, Gin and lex of certain monomial ideals, Math. Scand. 99 (2006), 76--86. (査読有)

[18] M. Kokubo and T. Hibi, Weakly polymatroidal ideals, Algebra Colloq. 13 (2006), 711--720. (査読有)

[19] J. Herzog, T. Hibi and X. Zheng, Cohen--Macaulay chordal graphs, J. Combin. Theory Ser. A 113 (2006), 911--916. (査読有)

[20] J. Herzog, T. Hibi and X. Zheng, The monomial ideal of a finite

meet-semilattice, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 4119--4134. (査読有)

[21] H. Ohsugi and T. Hibi, Special simplices and Gorenstein toric rings, J. Combin. Theory Ser. A 113 (2006), 718--725. (査読有)

[22] J. Herzog and T. Hibi, Cohen--Macaulay polymatroidal ideals, European J. Combin. 27 (2006), 513--517. (査読有)

[23] J. Herzog and T. Hibi, Level rings arising from meet-distributive meet-semilattices, Nagoya Math. J. 181 (2006), 29--39. (査読有)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

日比 孝之 (HIBI TAKAYUKI)
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：80181113

(2) 研究分担者

齋藤 睦 (SAITO MUTSUMI)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：70215565

(平成20、21年度は、連携研究者)

竹村 彰通 (TAKEMURA AKIMICHI)
東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授
研究者番号：10171670

(平成20、21年度は、連携研究者)

横山 和弘 (YOKOYAMA KAZUHIRO)

立教大学・理学部・教授

研究者番号：30333454

(平成20、21年度は、連携研究者)

大杉 英史 (OHSUGI HIDEFUMI)

立教大学・理学部・准教授

研究者番号：80350289

(平成20、21年度は、連携研究者)

大阿久 俊則 (OAKU TOSHINORI)

東京女子大学・文理学部・教授

研究者番号：60152039

(平成20、21年度は、連携研究者)

松井 泰子 (MATSUI YASUKO)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号：10264582

(平成20、21年度は、連携研究者)

齋藤 恭司 (SAITO KYOJI)

東京大学・数物連携宇宙機構・主任研究員

研究者番号：20012445

(平成20、21年度は、連携研究者)

高山 信毅 (TAKAYAMA NOBUKI)

神戸大学・理学部・教授

研究者番号：30188099

(平成20、21年度は、連携研究者)

青木 敏 (AOKI SATOSHI)

鹿児島大学・理学部・准教授

研究者番号：90332618

(平成20、21年度は、連携研究者)