様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21　年　5　月　27　日現在

研究種目：**基盤研究（Ｂ）**
研究期間：2006-2008
課題番号：18340009
研究課題名（和文）　**複素シンプレクティック多様体の研究**

研究課題名（英文）　Complex symplectic varieties

研究代表者
並河　良典（NAMIKAWA　YOSHINORI）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80228080

研究成果の概要：

アファイン複素シンプレクティック多様体 X で特異点を持ったものを重点的に研究した。研究成果の２つの柱は、ポアソン変形とべき零軌道である。
ポアソン変形に関しては,X の普遍ポアソン変形空間 PDef(X) が非特異であることを証明し、さらに X のクレパント特異点解消 Y の普遍ポアソン変形空間 PDef(Y)が PDef(X)のガロア被覆になることも示した。べき零軌道に関しては、その閉包として得られる複素シンプレクティック多様体のクレパント特異点解消、Q-factorial terminalization とよばれる部分特異点解消について結果を得た。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2007 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2008 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
年度			
総　計	5,200,000	1,560,000	6,760,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学、代数学
キーワード：複素シンプレクティック多様体、ポアソン変形、双有理幾何、べき零軌道、向井フロップ

１．研究開始当初の背景

多くのコンパクトな複素シンプレクティック多様体は、既知の代数多様体上の様々な対象のモジュライ空間として現れる。一般にこれらは、特異点を持ち、特別な場合に限って
クレパント特異点解消をもつ。こうしたやり方で、O'Grady によって、新しい複素既約シンプレクティック多様体の例が作られた。この時現れる特異点はシンプレクティック特異点とよばれるものになっている。またシン
プレクテック特異点は、幾何学的表現論の

世界では非常にポピュラーな対象である。しかしこれらを代数幾何の立場から見た研究はごく僅かであった。例えば、シンプレクティク多様体にはどのようなものがあるのか？　いつそれらはクレパント特異点解消を持つのか？　２つ以上のクレパント特異点解消を持つ場合に、互いの関係はどうなっているのか？等は良く分かっていなかった。
またこれらの特異点は孤立特異点ではないので従来の変形理論ではない変形理論を考える必要もあった。
Ginzburg-Kaledin はポアソン変形という概念を用いて、シンプレクティック商特異点を研究していた。しかし、十分に一般論が展開されている状況ではなかった。

２．研究の目的

(1) ポアソン変形：シンプレクテック特異点には自然にポアソン構造が入る。ポアソン構造をこめた変形をポアソン変形とよぶ。ポアソン変形の理論を整備して、非孤立特異点をもった複素シンプレクティック多様体に対して適用する。

(2) べき零軌道と双有理幾何：複素単純リー環のべき零軌道は、Kostant-Kirillov 形式によって複素シンプレクティック多様体となる。さらにべき零軌道の閉包をとると、特異点をもったアファイン複素シンプレクティック多様体が得られる。これらが、いつクレパント特異点をもつか？　複数個のクレパント特異点解消を持ったとき、互いの関係は
どのようなものか？　また、クレパント特異点解消をもたないときには、その代替物である Q-factorial terminalization は如何にして構成されるかを明らかにする。

３．研究の方法

双有理幾何の極小モデル理論で、最近大きな進展(Birkar-Cascini-Hacon-McKernan)
があった。これらの結果を援用する。
また、ポアソン変形と、クレパント特異点解消の間には密接な関係がある。これらをうまく組み合わせて、一方から他方の結果を引き出す。

４．研究成果

べき零軌道の閉包 X（より正確には、その正規化）はアファイン複素シンプレクティック多様体になる。B. Fu によって、X のクレパント特異点解消はすべて、Springer 特異点解消であることが知られている。ただし代数群 G を放物群 P で割ってできた旗多様体 G/P の余接束から X へのモーメント写像のことを Springer 写像と呼び、Springer 写像が双有理写像になるときこれを Springer 特異点解消と呼ぶ。一般の X に対してはこのような特異点解消は存在しないし、存在したとしても P の選び方は一意的ではない。[1] では、G の放物部分群全体にある種の同値関係を入れ、P と同値な放物部分群 P’ はすべて X の Springer 特異点解消を与えることをしめした。さらに、X のクレパント特異点解消はすべてこの形であることも証明した。同値関係を導入するところで印つき Dynkin 図形を用いたが、この Dynkin 図形から３種類の向井フロップ(A 型、D 型、E 型）が定義される。X の相異なるクレパント特異点解消は、これら３種類の向井フロップの合成で結ばれる。Springer 写像が存在するようなべき零軌道を Richardson 軌道と呼ぶ。一般に Richardson 軌道の閉包
X は Springer 特異点解消を持たない。すなわち、Springer 写像は、generically finite 射でしかない。このとき、Springer 写像のスタイン分解 X’ もアファイン複素シンプレクティック多様体になる。このような X’の クレパント特異点解消を完全に決定したのが、[2] である。X’の２つのクレパント特異点解消を結ぶには、上の３種類の向井フロップだけでは駄目で、新しいタイプのフロップが必要になる。この新しいタイプのフロップも [2] において分類した。
次に、Richardson 軌道とは限らない全く一般のべき零軌道を考える。このとき Springer 写像の概念を少し一般化して、generalized Springer 写像と呼ばれるものを定義することができる。Generalized Springer 写像の定義には、Lusztig-Spaltenstein の誘導軌道の概念が用いられる。[3] では、「一般のべき零軌道の閉包 X の Q-factorial terminalization は全て、generalized Springer 写像として実現される」という予想を提起して、G が古典型の場合に予想を証明した。その後、B. Fu によって例外型の G に対しても予想が証明された。
次に、ポアソン変形に関する成果について

述べる。[4] では、凸型複素シンプレクティック多様体に対するポアソン変形を研究した。
その応用として、複素シンプレクティック多様体の間のフロップでは特異点に変化が生じないことを示した。ここで、アファイン複素シンプレクティック多様体 X で、正の荷重つきの C^*-作用をもったものを考える。
さらに X のポアソン構造も正の荷重を持つと仮定する。Birkar-Cascini-Hacon-McKernan の結果より、X は Q-factorial terminalization f: Y -> X を持つ。このとき、Y も自然に複素シンプレクティック多様体となり、X, Y 各々の（ポアソン変形における）倉西空間 PDef(X), PDef(Y) を考えることができる。写像 f は PDef(Y) から PDef(X) への自然な写像

f_*: PDef(Y) -> PDef(X)

を導く。このとき、PDef(X), PDef(Y) はともに非特異であり、f_* は有限ガロア被覆である(Poisson deformations of affine symplectic varieties,I,II math.AG/0609741, math.AG/09022832)。
この結果の系として次のことがわかる：

X に対して次の２つの条件は同値：
(a) X はクレパント特異点解消をもつ。
(b) X はポアソン変形によってスムージング可能。

これは、すでに射影的複素シンプレクティック多様体に関しては、著者によって証明されていた [5].

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　6　件）

[1] Y. Namikawa, Birational geometry of symplectic resolutions of nilpotent orbits, Adv. Stud. Pure Math. Vol 45, 75-116 (2006)

[2] Y. Namikawa, Birational geometry and deformations of nilpotent orbits, Duke Math. J. Vol 143, 375-405 (2008)

[3] Y. Namikawa, Induced nilpotent orbits and birational geometry, to appear in Advances in Mathematics

[4] Y. Namikawa, Flops and Poisson deformations of symplectic varieties, Publ. RIMS, Vol 44, 259-314 (2008)

[5] Y. Namikawa, On deformations of Q-factorial symplectic varieties, J. Reine Angew. Math. Vol 599, 97-110 (2006)

[6] 並河良典，双有理幾何とべき零軌道，数学, Vol 60, 295-318 (2008)

〔学会発表〕（計　12　件）

[1] Y.Namikawa, Birational geometry for nilpotent orbits, Conference "Higher dimensional Algebraic Geometry", Echigo Yuzawa, Japan, 2006.12

[2]Y.Namikawa, Flops and Poisson deformations of symplectic varieties, Works hop on holomorphic symplectic varieties, Max-Planck Inst. Bonn, Germany, 2006.5

[3]Y.Namikawa, Birational geometry for nilpotent orbits and Mukai flops, Modular forms and Moduli spaces, Euler Inst. (Saint-Petersburg, Russia), ２００７年７月３日

[4] Y. Namikawa, Poisson deformations and symplectic varieties, 代数学シンポジウム（神戸大）２００７年８月８日

[5]Y. Namikawa, べき零軌道と双有理代数幾何、高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学（九州大）２００７年９月１１日

[6]Y. Namikawa, Poisson deformations and symplectic varieties, Complex Geometry in Osaka （大阪大中之島センター）　２００７年１１月４日

[7]Y. Namikawa, Poisson deformations and symplectic varieties, Algebraic geometry and commutative algebra Tokyo 2007（東京大）２００７年１２月１４日

[8]Y. Namikawa, Poisson deformations and symplectic varieties, UK-Japan Winter school, Algebraic and symplectic geometry, (University of Warwick, England)

2008 年 1 月 8 日

[9] 並河良典、べき零軌道と双有理代数幾何、日本数学会特別講演(代数学賞受賞講演), 2008 年３月、近畿大

[10] Y. Namikawa, Poisson deformations and symplectic varieties, Pacific Rim Conference, 2008 年７月, Seoul, Korea

[11] Y. Namikawa, Induced nilpotent orbits and birational geometry, 城崎代数幾何シンポジウム 2008 年、城崎大会議館

[12] Y. Namikawa, Induced nilpotent orbits and birational geometry, COW-COE Tokyo, 2008 年 12 月、東大数理

６．研究組織

(1) 研究代表者

並河良典（NAMIKAWA YOSHINORI）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80228080

(2)研究分担者

藤木　明（FUJIKI　AKIRA）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80027383
後藤　竜司（GOTO RYUSHI）
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号；30252571
高橋　篤史（TAKAHASHI ATSUSHI）
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：50314290
臼井　三平（USUI SAMPEI）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90117002
大野　浩司（OHNO KOJI）
大阪大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号；20252570
佐竹　郁夫（SATAKE IKUO）
大阪大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：80243161

(3)連携研究者

藤木　明（FUJIKI　AKIRA）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80027383
後藤　竜司（GOTO RYUSHI）
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号；30252571
高橋　篤史（TAKAHASHI ATSUSHI）
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：50314290