

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2006～2009

課題番号：18340010

研究課題名（和文） 安定層のモジュライ空間の研究

研究課題名（英文） Studies on moduli of stable sheaves

研究代表者

吉岡 康太 (YOSHIOKA KOTA)

神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：40274047

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：モジュライ、ベクトル束、Donaldson 不変量

#### 1. 研究計画の概要

(1) 代数多様体上のさまざまな対象、特に層とその付加構造のモジュライ空間の構造を調べることに、

(2) またそれらを利用して Donaldson 型不変量の構造を調べることに、

(3) Symplectic 多様体としてのモジュライ空間の構造をしらべること、とくに K3 曲面やアーベル曲面上の層のモジュライを調べることに。

おおまかには (1) から (2) の順序で研究を行い、また (3) は (1) と (2) 平行して研究する。

#### 2. 研究の進捗状況

##### (1)

曲面の爆発における層のモジュライ空間の詳細な関係を調べることと、有理2重点の極小特異点解消の上の層のモジュライ空間を調べることを目的として、perverse coherent 層のモジュライ空間を構成しその構造を調べた。特に曲面の爆発の場合は壁越え現象によりモジュライ空間の挙動を捕らえることができ、たとえば Betti 数の爆発公式のより良い理解が得られた。

##### (2)

Donaldson 型不変量を調べることについては、cobordism の考えを利用することと、望月卓郎氏の結果を利用することにより、以前 Toric 曲面の場合に示していた Donaldson 不変量の壁越え公式を一般の代数曲面の場合に拡張した。また K-理論的 Donaldson 不変量の壁越え公式を Chern-Simon 項を入れた形で定式化し、Nekrasov 分配関数を利用して書き下した。また射影平面の場合に、

Chern-Simon 項が入らないもとの K-理論的 Donaldson 不変量を楕円関数を使って書き下した。

(3) モジュライ空間を調べるのに、まず Fourier-Mukai 変換により安定性が保たれるための良い十分条件をえた。またアーベル曲面上のモジュライ空間の双有理構造が Fourier-Mukai 変換で保たれることを示し、その応用として、アルバネーゼ写像のファイバーに現れる既約 Symplectic 多様体の双有理同値類が Lagrangian ファイバー構造を持つための必要十分条件を記述した。

#### 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(1) Perverse coherent sheaf は通常の変換層の圏からはみ出た圏の対象であり、このような新たな視点でモジュライを考えることは、それだけで意味のあることと考える。

(2) さらには応用として Donaldson 型不変量についての以前の予想も解決できた。また壁越え公式を一般の代数曲面の場合にまで拡張できた。(3) アーベル曲面の場合に Fourier-Mukai 変換でモジュライ空間の双有理構造が保たれることが示せた。

#### 4. 今後の研究の推進方策

Perverse coherent sheaf のモジュライを使って Donaldson 型不変量の挙動を調べ、得られた帰結を論文としてまとめること、Fourier-Mukai 変換と perverse coherent sheaf の関係を論文としてまとめること、アーベル曲面の場合に Fourier-Mukai 変換

と双有理写像の関係をより精密に調べ論文にまとめることなど。

5. 代表的な研究成果  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

1

H. Nakajima and K. Yoshioka:  
Perverse coherent sheaves on blow-up. I. a quiver description,  
Advanced Studies in Pure Mathematics, to appear, 査読有

2

K. Yoshioka:  
Fourier-Mukai transform on abelian surfaces,  
Math. Ann. to appear, 査読有

3

K. Yoshioka:  
Stability and the Fourier-Mukai transform II,  
Compositio Mathematica, vol. 145 (2009), 112--142, 査読有

4

L. Goettsche, H. Nakajima and K. Yoshioka:  
K-theoretic Donaldson invariants via Instanton Counting,  
Pure and Applied Mathematics Quarterly, vol. 5 (2009), 1029--1111, 査読有

5

L. Goettsche, H. Nakajima and K. Yoshioka:  
Instanton counting and Donaldson invariants,  
J. Differential Geom. Vol. 80 (2008), 343--390, 査読有

[学会発表] (計5件)

1

吉岡康太 Fourier-Mukai transform and the moduli of stable sheaves on abelian surfaces,  
Complex Geometry in Osaka, 藤木先生還暦記念研究集会,  
2007年11月1日～5日, 大阪大学中之島センター

2

吉岡康太 Stability and the Fourier-Mukai transform,  
Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces, Hokkaido University,  
9/3--9/7, 2007

3

吉岡康太 Stability and the Fourier-Mukai transform,  
Workshop: Non-linear integral transforms: Fourier-Mukai and Nahm,  
Centre de recherches mathematiques,  
8/27--8/31, 2007

4

吉岡康太 代数曲面上のベクトル束のモジュライ空間,  
日本数学会 2007 年度年会・代数学分科会特別講演, 埼玉大学  
2007年3月27日--3月30日

5

吉岡康太 Stability and the Fourier-Mukai transform,  
Higher Dimensional Algebraic Geometry, Echigo Yuzawa,  
12/11--12/15, 2006