

平成22年 5月13日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2006～2009

課題番号：18340013

研究課題名 (和文) 特異点論の応用としての微分幾何と偏微分方程式

研究課題名 (英文) Differential Geometry and Partial Differential Equations
as an application of Singularity theory

研究代表者

泉屋 周一 (IZUMIYA SHYUICHI)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：80127422

研究成果の概要 (和文)：この研究を通して、微分幾何学、シンプレクティック幾何学、非線形偏微分方程式などの数学内部の対象へ特異点論を応用し、様々な結果を得たばかりではなく宇宙物理学など、周辺科学と関連性のある結果を得た。特に、特異点論を様々な種類の空間形の部分多様体に応用することにより、様々な幾何学 (ホロ球面的幾何学、斜傾幾何学) を構成し、その不変量の導入とその幾何学的意味を明らかにした。その結果、ブレーン宇宙論や一般相対性理論におけるモデル空間に現れるブラックホールなどの事象の地平線の形状やその特異点の幾何学的意味付けなどを得ることができた。

研究成果の概要 (英文)：In this research project, we applied Singularity Theory to some areas in Mathematics such as Differential Geometry, Symplectic Geometry, non-linear Partial Differential Equations etc, so that we have obtained several results. Moreover, we have obtained related results on some boundary areas such as Astrophysics etc. Especially, we applied Singularity Theory to Differential Geometry of submanifolds in several kinds of space forms. Then we constructed new geometries (Horspherical Geometry, Slant Geometry) and induced some new invariants. We also clarified the geometric meanings of these invariants. As a result, we have a geometric characterization of the singularities and the shape of event horizons

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2007年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2008年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2009年度	4,200,000	1,260,000	5,460,000
年度			
総計	12,800,000	3,840,000	16,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：特異点論、微分幾何、偏微分方程式、シンプレクティック幾何、接触幾何、画像処理、ブレーン宇宙、重力場レンズ、ラグランジュ特異点、ルジャンドル特異点

1. 研究開始当初の背景

特異点論の故郷は幾何学である。現代幾何学における2つの大きな分野として、位相幾何学と微分幾何学が挙げられるが、特異点論は両方の幾何学を故郷としている。近年、数学内外の様々な分野に現れる非線形現象や特異性がある種の微分可能写像の特異点として捉えられることが、次第に明らかにされてきている。特に、部分多様体の微分幾何学、特異点を許容するような図形の微分幾何学、複素解析的曲面の孤立特異点の近傍に現れる接触構造やシンプレクティック構造、画像処理(映像理論)などがその例として挙げられる。また、ブラックホールや重力場レンズに現れる特異性なども非線形偏微分方程式の解に現れる特異性として、また、ある種の焦面の特異性との理解も進んできている。

2. 研究の目的

1の背景として考えられる事実をまとめて標語的に言い表すと表題の「特異点論の応用としての微分幾何と偏微分方程式」と言うことができる。当研究は、これらの分野といままで知られていなかった新たな分野への応用を目指して特異点論の基礎的部分の改良とその具体的応用を実施するものである。

3. 研究の方法

理論物理学と関連した部分や映像理論と関連した分野を中心に特異点論の応用を試みた。具体的には、分担者や連携研究者を大まかに以下の3つのグループに分けて研究を推進した。(a) 微分幾何学、シンプレクティック幾何学や偏微分方程式の幾何学的理論において問題の発掘と理論の整備を行うグループ:(小野、山口、梅原)。(b) 偏微分方程式論の解析的側面の整備と映像理論や結晶成長の理論における偏微分方程式の解に特異点が出現する状況を幾何学的測度論や解析的方法により研究するグループ:(利根川、小池)。(c) 他のグループで整備された概念、道具を特異点論の立場から見直し、応用が可能なものは応用し、問題点を整備しそれを他のグループへフィードバックするグループ:(泉屋、石川、大本)。これらの役割分担の下で、各グループで得られた問題点や結果を分担者会議や個別の研究打ち合わせなどを通して、研究を推進した。各年度ごとにそれまでに得られた、問題点や新たな現象にたいして、上の研究分担に沿って、具体的な目標をたてて、成立する諸定理な

どの目標を決め具体的に証明を試みた。さらに毎年度ごと目標となる幾何学的現象や偏微分方程式の種類を定めることも平行して行った。

理論系の分野である数学の主たる研究方法は、実際の面談による、研究打ち合わせである。この場合、研究打ち合わせと言っても、準備のための打ち合わせではなく、実際に踏み込んだ計算や証明が行われるために、一回の訪問や招聘が最低1週間~3週間に及ぶ。そのために、全体で決算では、旅費に占める率が高くなっている。これらの方法を実施するために、連携研究者のみならず国内外の専門家の招聘や訪問が主となった。

4. 研究成果

ルジャンドル特異点論の応用としてミンコフスキー空間内の擬球面の間のルジャンドル双対性定理を証明し、その応用として擬球面内の部分多様体に対して、様々な幾何学を構成した。特に、双曲空間内の場合にホロ球面的幾何学を構成し、それまで全く手つかずいた、ホロタイトという性質を解明した。また、ホロ球面的幾何学に付随した、曲率が常に零となる曲面はホロ円の1径数族で表示されることがわかり、一般には特異点を持つ曲面となる。この曲面は、ユークリッド空間内の線織面の類似物となるが、類似した性質と全く異なる性質両面を持つ大変興味深い幾何学的対象であることが判った。この曲面の特異点の分類をある種の双曲不変量を構成しそれを用いて実行した。その結果、ユークリッド空間の場合とは全く違う状況が明らかになった。さらに、擬ユークリッド空間内の擬球面に対して、4種類のルジャンドル双対性に関する定理を証明した。特に、ミンコフスキー空間の場合に光錐どうしの双対性が、その中の空間的超曲面に対して、新たな幾何学を構成できることがわかり、その不変量を構成した。その不変量として得られるある種のガウス曲率と平均曲率に対して、平均曲率が内在的不変量となり、ガウス曲率が外在的不変量となるという、通常のユークリッド空間の場合のガウスの驚愕の定理と全く逆の状況が起こるという興味深い現象を発見した。さらに、このルジャンドル双対性定理を無限個の擬球面の族に対して成り立つ事をしめし、その無限個の族に対応する、新たな幾何学(斜傾幾何学)を構成した。この、斜傾幾何学はそれぞれの擬球面に対して構成できるが、とくに双曲空間の場合は、有名なガウス・ロバチェフスキー・ボヤイの非ユークリッド幾何学(双曲幾何学)と前記のホロ球面的幾何学とをつ

なく1径数族を構成することがわかった。また、反ドジッター空間内の理論物理学におけるモデル時空が数学的にはある種の全局的超曲面であることを見出し、その結果、ルジャンドル特異点論を応用すると、ブレーン宇宙論における事象の地平線の形状の研究が可能であることを発見した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

① S. Izumiya and F. Tari: Projections of surfaces in the hyperbolic space along horocycles, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 査読有 140A 399-418 (2010)

② S. Izumiya : Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone, *Moscow Mathematical Journal*, 査読有 Vol.9, 325-357 (2009)

③ S. Izumiya and F. Tari: Projections of surfaces in the hyperbolic space to hyperhorospheres and hyperplanes, *Revista Matematica Iberoamericana*, 査読有 Vol. 24, 895--920 (2008)

④ A. A. Davydov, G. Ishikawa, S. Izumiya and W.-Z. Sun: Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane, *Japanese Journal of Mathematics*, 査読有, Vol.3, 93--119 (2008)

⑤ G. Ishikawa and S. Janeczko: Bifurcations in symplectic space, *Banach Center Publ.*, 査読有 vol. 82 (2008), 111-124.

⑥ Y. Tonegawa: Applications of geometric measure theory to two-phase separation problems, 査読有 *Sugaku Expositions* 21, 97-115 (2008)

⑦ K. Yamaguchi: Geometry of linear differential systems towards contact geometry of second order. *Symmetries and overdetermined systems of partial differential equations*, 査読有 151--203, *IMA Vol. Math. Appl.*, 144, *Springer, New York*, (2008).

⑧ S. Izumiya and M. C. Romero Fuster: The lightlike flat geometry on spacelike submanifolds of codimension two in Minkowski space, *Selecta Mathematica New Series*, 査読有 13 23-55 (2007)

⑨ G. Ishikawa and J. Adachi: Classification of phase singularities for complex scalar waves and their bifurcations, 査読有 *Nonlinearity* 20 (2007) 1907--1925.

⑩ G. Ishikawa and Y. Machida: Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature. *International Journal of Mathematics*, 査読有 Vol. 17--3 (2006), 269--293.

⑪ K. Ono: Floer-Novikov cohomology and the flux conjecture. *Geom. Funct. Anal.* 査読有 16 , no. 5, 981-1020 (2006).

[学会発表] (計 4 件)

① S. Izumiya: Singularities of caustics emitted by timelike hypersurfaces in Anti de Sitter space, *JSPS forum Singularities and Applications*, Strasbourg, France, 2009年8月24日

② 泉屋周一: 応用特異点論の現状と展望
応用特異点論の現状と展望 (北海道大学)
2009年3月16日

③ S. Izumiya: Spacelike surfaces in Anti de Sitter 4-space, *Real and Complex singularities ICMC-USP*, Sao Carlos, Brazil 2008年7月27日

④ S. Izumiya : Horospherical geometry in Hyperbolic space *International conference Analysis and Singularities (Arnol' d 70) Steklov Institute (MOSCOW)* 2007年8月24日

[図書] (計 4 件)

① 竹内伸子、泉屋周一、村山光孝: 座標幾何学演習 日科技連出版、
1-127ページ 2008年

② 竹内伸子、泉屋周一、村山光孝：座標幾何学-古典的解析幾何学入門- 日科技連出版、1-220ページ 2008年

③ 泉屋周一：初級 線形代数、共立出版 110ページ 2008年

④ S. Izumiya, G. Ishikawa, H. Tokunaga, I. Shimada and T. Sano: Singularity theory and Its Applications, Advanced Studies in Pure Mathematics vol. 43 Mathematical Society of Japan, 1-583 (2006)

[その他]
ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp>

<http://researchmap.jp/izumiya/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

泉屋 周一 (IZUMIYA SHYUICHI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：80127422

(2) 研究分担者

石川 剛郎 (ISHIKAWA GOO)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：50176161

小野 薫 (ONO KAORU)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：20204232

山口 佳三 (YAMAGUCHI KEIZO)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：00113639

大本 亨 (OHMOTO TORU)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：20264400

利根川 吉廣 (TONEGAWA YOSHIHIRO)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：80296748

梅原 雅顕 (UMEHARA MASAOKI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90193945
(H18-H19)

小池 茂明 (KOIKE SHIGEAKI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：90205295
(H18-H19)

(3) 連携研究者

梅原 雅顕 (UMEHARA MASAOKI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90193945
(H20-H21)

小池 茂明 (KOIKE SHIGEAKI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：90205295
(H20-H21)