

平成 21 年 5 月 11 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18340017

研究課題名 (和文) ツイスター空間の幾何学

研究課題名 (英文) Geometry of twistor spaces

研究代表者

藤木 明 (FUJIKI AKIRA)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80027383

研究成果の概要：

いわゆるペンローズ対応により、反自己双対多様体とよばれる 4 次元の実多様体とツイスター空間とよばれる 3 次元の複素多様体の間に、幾何学的な等価関係がある。しかし、これらの具体例を構成することは一般には大変困難である。本研究では、このような新しい具体例を、4 次元実多様体上に、近年着目を集めている双エルミート構造を付加する形で組織的に構成した。得られた例は非ケーラーであり、ルブランの 20 年前の例を大きく一般化するものである。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	2,600,000	0	2,600,000
2007 年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2008 年度	2,400,000	720,000	3,120,000
年度			
年度			
総計	7,400,000	1,440,000	8,840,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ツイスター空間, 自己双対多様体, 複素多様体, VII 型曲面, 井上曲面

1. 研究開始当初の背景

非ケーラーの場合の(コンパクト)反自己双対エルミート曲面については、20 年前にルブランにより見事な明示例が得られているが、以降どのような例も見つかっていなかった。一方、ジョイスのツイスター空間に関する代表者の研究と、ドナルドソン・フリードマンの方法の一般化に関する共同研究者ポンテコルボ氏の研究をうまく組み合わせると、ルブランのそれとはまったく異なるツイスター空間の方法により、井上曲面をはじめ多くの VII 型曲面に反自己双対エルミート構造を構成する見通しが得られた。またこれが双

エルミート構造をあたえることの展望も得ており、これらが当時出たばかりのグアルティエリの結果により一般化されたケーラー構造を与えることもわかっていた。

2. 研究の目的

双曲的井上曲面(井上ヒルツェブルフ曲面)、放物的井上曲面およびホップ曲面のブローアップの上に、あるいはより一般に非連結な反標準正因子を有する VII 型曲面上に、上記の方法でできるだけ広範囲に反自己双対双エルミート構造を構成すること。しかも、構成した対象の幾何構造およびその局所的

大域的モジュライの構造ができるだけ詳細にわかる形で構成を行うこと. さらにルブランにより構成されたものとの比較, 同定を行うこと, などが, 研究当初の目的であった.

3. 研究の方法

ジョイスのツイスター空間とその上の2対の基本曲面对から出発して, ツイスター空間とその上の2対の曲面对の「特異モデル」を作り, この幾何学構造を明確にする. ついで, この特異複素空間対の倉西族を研究する, 特に全空間および一般ファイバーの非特異性を示し, 生ずる非特異曲面对を双曲的(放物的)井上曲面, ホップ曲面のブローアップと同定する. また互いに対になる曲面の関係を明らかにする. これらの研究には, 小平, 井上, 中村, 加藤, 榎など小平学派によって発展させられた VII 型曲面論の研究成果を駆使している.

もっとも重要で困難な段階は, 特異複素空間対の変形の障害が消滅を示すことである. このために, 上記で求めた幾何学構造を局所的, 大域的なコホモロジー不変量の消滅に適用し, 最終的に代表者が以前に示したジョイスのツイスター空間の変形の障害の消滅に帰着させる.

4. 研究成果

(1) 双曲型および放物型の井上曲面とその上の反標準因子の対の変形の倉西族の構成とその性質の解明. 特に倉西空間の非特異性, 次元と倉西族ファイバーの同定.

(2) トーリック曲面のあるクラスについてその特異モデルの自己同型, 変形の倉西族の構成とその性質の解明. 特に倉西空間の非特異性, 次元と倉西族のファイバーの同定

(3) (2) のトーリック曲面の不変量とこれから生ずる双曲型および放物型井上曲面の不変量の比較. この対応の全射性と異なるトーリック曲面から同じ井上曲面が生ずる場合の決定.

(4) ジョイスのツイスター空間とその上の2対の特異曲面对の特異モデルの構成, その特異点の局所構造, 自己同型, 反標準因子の同定. (2) のすべてのトーリック曲面の特異モデルが, この構成から生じること.

(5) (4) の特異モデルの変形の倉西族の構成とその性質の解明. 特に倉西空間, 倉西族の全空間, および一般ファイバーの非特異性, 倉西空間の次元と倉西族のファイバーの同定.

(5) 倉西族の実構造の解析と, 一般ファイバーの反自己双対双エルミート曲面に対応するツイスター空間としての同定

(6) この構成により, すべての双曲型井上曲面(井上ヒルツェブルフ曲面)上に反自己

双対双エルミート構造の m 次元族が(一般的には m 個)構成できること. ただし, m は曲面の Betti 数

(7) (6) において, 各曲面对を構成する2曲面は互いに同型であるが, 他の曲面对に属する曲面とは互いに Zaffran の意味で転置の関係にあること.

(8) 各 m に対し実一次元族をなす放物型井上曲面に対しては, やはり反自己双対双エルミート構造の m 次元族が存在する. この場合は, 片方の曲面对のそれぞれがもう片方の曲面对のそれぞれと同型になることを発見. ルブランの例の一つはこの場合であるが, ここでの例との同定は今後の研究課題である.

(9) (1) の倉西族の各非特異ファイバー(それらは, 中心の双曲型井上曲面を除きすべて極小でなく, 一般ファイバーはホップ曲面のブローアップである)は, すべて反自己双対双エルミート構造を持つ. この結果は, VII 型曲面に対する反自己双対双エルミート構造の存在に関するポンテコルボの条件の逆問題の部分的肯定的解決を与えている.

(10) 特異ツイスター空間の構成をある意味で“ねじった”あとで上記の方法を適用することにより, 半井上曲面(奇数型の井上ヒルツェブルフ曲面)上に, 反自己双対エルミート構造を構成した. これらは反自己双対双エルミート構造を持たない反自己双対エルミート構造の初めての例である.

(11) 反自己双対エルミート計量は局所ケーラーであることが知られているが, 一方, 2次ベッチ数が正である局所ケーラー計量は, 今日までほとんど知られていない. 上記の結果は, すべて新しい局所ケーラー計量をあたえる.

(12) 研究の背景においてものべたグアルティエリの結果により, 上記の VII 型曲面に一般化されたケーラー構造が入ることが従う.

(13) 以上の研究に触発されて, 半井上曲面に対する (1) の倉西族の類似を考察すると, この族において強い意味で代数次元の上半連続性が, 破綻していることを発見した. このような例は以前には知られていなかった.

(13) 以上の研究に触発されて, 放物型井上曲面の自己同型群を決定した. (双曲型井上曲面については, 30年前にピンカムが既に決定している.)

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 24 件: すべて査読あり)

1. R. Goto, Poisson structures and general-ized Kaehler submanifolds, J. Math. Soc.

- Japan, 61 (2009), 107-132.
2. N. Honda, A new series of compact mini-twistor spaces and Moishezon twistor spaces over them. to appear in J. reine angew. Math.
 3. N. Honda, Explicit construction of new Moishezon twistor spaces, to appear in J. Differential Geom. math.DG/0701278
 - Masuda, K., and Miyanishi, M., Lifting of locally nilpotent derivations under finite homomorphisms, to appear in Tohoku Math. J.
 4. Miyanishi, M., Additive group scheme actions on the integral schemes defined over discrete valuation rings, to appear in J. Algebra, a special issue for Professor Paul Roberts, in press.
 5. Miyanishi, M., Smoothness of the images of the members of a linear pencil under an endomorphism of the affine plane, Journal of Pure and Applied Algebra 213, (2009), 711--723.
 6. Gurjar, R.V., and Miyanishi, M., Jacobian problem for singular surfaces, J. Math. Kyoto Univ. 48, (2009).
 7. Kato, K., Nakayama, C. and Usui, S., Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, I: Borel Serre spaces in "Algebraic Analysis and Around" in honor of Prof. M. Kashiwara's 60th birthday, Advanced Studies in Pure Math. 54, Math. Soc. Japan, 2009, 187-222.
 8. Usui, S., Generic Torelli theorem for quintic-mirror family, Proc. Japan Acad., Ser. A, vol 84A (8), 2008, 143--146
 9. Kato, K., Nakayama, C. and Usui, S. SL(2)-orbit theorem for degeneration of mixed Hodge structure, J. Alg. Geom. 17, 2008, 401-479.
 10. Y. Namikawa, Birational geometry and deformations of nilpotent orbits, Duke Math. J. vol. 143, (2008), 375-405.
 11. Y. Namikawa, Flops and Poisson deformations of symplectic varieties, Publ. RIMS, Kyoto Univ. vol. 44, (2008) 259-314.
 12. A. Fujiki, Bihermitian anti-self-dual structures on compact non-Kaehler surfaces, In: Complex Geometry in Osaka, Lecture Notes Ser. in Math., 9, 2008, 147--151.
 13. N. Honda, On a construction of the twistor spaces of Joyce metrics, J. Algebraic Geom. 17 (2008) 709-750.
 14. N. Honda, Double solid twistor spaces: the case of arbitrary signature. Invent. math. 174 (2008) 463-504.
 15. 本多 宣博, ツイスター空間と自己双対計量, 数学 (岩波書店) 60 (2008) 380-398.
 16. Miyanishi, M., G_a -actions and completions, J. Algebra 319 (2008), 2845--2854.
 17. A. Fujiki, Compact non-Kaehler threefolds with $SL_2(\mathbb{C})$ -actions, Workshop on complex geometry and group actions, 2007, Niigata-shi, 33--41.
 18. N. Honda, Twistor lines on Nagata threefold, J. Math. Kyoto Univ. 47 (2007) 837-848.
 19. N. Honda, Self-dual metrics and twenty-eight bitangents, J. Differential Geom. 75 (2007) 175-258.
 20. N. Honda, Equivariant deformations of LeBrun's self-dual metric with torus action, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007) 495-505.
 21. Y. Ohyama, Rational transformations of confluent hypergeometric equations and algebraic solutions of the Painleve equations : P1 to P5, RIMS Kokyuroku Bessatsu B2 (Algebraic, Analytic and Geometric Aspects of Complex Differential Equations and their Deformations. Painleve Hierarchies), (2007) 137--150.
 22. Y. Ohyama and K. Kazuo Fifth Painleve transcendents which are analytic at the origin, Funkcial. Ekvac. 50 (2007) 187--212.
 23. Usui, S. Images of extended period maps, J. Alg. Geom. vol 15, (2006), 603-621
 24. Y. Ohyama, H. Kawamuko, H. Sakai and K. Okamoto, Studies on the Painleve equation V, third Painleve equations of special type PIII(D7) and PIII(D8), J. Math. Sci. Univ. Tokyo 13 (2006), 145--204.
- [学会発表] (計 26 件)
1. 後藤竜司, Generalized Kaehler geometry and Holomorphic Poisson structures, 研究会幾何構造の諸相, 名城大学, 2009. 3. 3.
 2. R. Goto, Unobstructed deformations on holomorphic Poisson manifolds and generalized Kaehler structures, Mini-workshop on complex differential geometry, Osaka Univ., 2009. 1. 29.
 3. A. Fujiki, Non-upper semi-continuity of algebraic dimension for families of compact complex surfaces, Mini-workshop on complex differential geometry, Osaka Univ., 2009. 1. 28.
 4. A. Fujiki, Anti-self-dual bihermitian structures on compact complex surfaces of class VII, Supersymmetry in complex

geometry, IPMU, 2009.1.7.

5. R. Goto, Holomorphic Poisson structures and deformations of generalized Kahler structure, workshop: Supersymmetry in complex geometry, generalized complex structures, generalized Kahler structures, symplectic and Hermitian structures on complex manifolds IPMU, 東京大学 2009.1.7.

6. R. Goto, Deformations of generalized Kähler structures on holomorphic Poisson manifolds (第4回日中友好幾何学会議) Chern Institute of Mathematics, Nankai University(南開大学), 2008.12.25.

7. A. Fujiki, Anti-self-dual bihermitian structures on Inoue surfaces via twistor theory, CIRGET Geometry and topology seminar, UQAM, 2008.11.14.

8. Goto, R., Calabi's conjecture on non-compact, cylindrical Kähler manifolds, The 14th International Symposium on Complex Geometry, 菅平, 2008.10.23.

9. S. Usui, Generic Torelli Theorem for quintic-mirror family by log Hodge theory GEOMETRY OF SINGULARITIES AND MANIFOLDS -- KUSATSU 2008 - 2008.9.12.

10. A. Fujiki, Anti-self-dual bihermitian structures on Inoue surfaces, Geometrie des varietes complexes III, CIRM, 2008.7.1.

11. S. Usui, Log Hodge structure and a geometric application, Hodge Theory, Banff International Research Station, 2008.4.8.

12. S. Usui, Moduli of polarized logarithmic Hodge structures and period maps, Regulators and Heights in Algebraic Geometry, Pacific Institute for Math. Sci. and Univ. of Alberta, 2008.4.16.

13. A. Fujiki, Anti-self-dual bihermitian structures on hyperbolic Inoue surfaces via twistor methods, Complex Analysis and Complex Geometry Seminar, Univ. of Houston, 2008.3.26

14. Goto, R., 藤木先生還暦記念研究集会, 大阪大学中之島センター, Deformations of generalized Kähler structures, Poisson structures, and generalized Kähler submanifolds 2007.11.5.

15. A. Fujiki, Anti-self-dual bihermitian metrics on Inoue surfaces, Complex Geometry in Osaka, 中ノ島センター, 2007.11.3.

16. S. Usui, Images of log period maps: Cases of varieties of general type and of varieties with trivial canonical bundle

研究集会「高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学」,九州大学数理学研究科,2007.9.11.

17. A. Fujiki, Compact non-Kähler threefolds with $SL_2(\mathbb{C})$ -actions 研究会「複素幾何学と群作用」クロスパルにいがた, 2007.6.29.

18. A. Fujiki, Basics on compact hyperKähler manifolds, KIAS workshop on holomorphic symplectic geometry, PRIMA Conference, 2007.3.13.

19. A. Fujiki, Twistor spaces with $SL_2(\mathbb{C})$ -actions, 多変数関数論唐津シンポジウム, 唐津, 2007.1.27.

20. A. Fujiki, Compact non-Kähler manifolds associated to real hyperbolic manifolds, Geometrie des Varietes complexes II, CIRM, 2006.10.19.

21. S. Usui, Polarized Log Hodge structures and 8 enlargements of Griffiths domain, Seminar「Complex Algebraic Geometry」, 高等研究所、プリンストン、USA, 2006.9.27.

22. Usui, S., Classifying spaces of degenerating (mixed) polarized Hodge structures, International Conference and Instructional Workshop: Geometry, Topology, Analysis of Locally Symmetric Spaces and Discrete Groups, Morningside Center of Mathematics, 北京, 2006.8.18.

23. Goto, R., Deformations of generalized Calabi-Yau, hyperKähler, G_2 and Spin(7) structures, University of Science and Technology of China Hefei, Huangshan, Pacific Rim Complex Geometry Conference, 2006.8.5

24. Goto, R., Deformations of holomorphic symplectic structures I, II, 部分多様体論のさらなる発展にむけて RIMS 研究集会, 2006.7.10.

25. Usui, S., Log mixed Hodge theory and its geometric applications, 代数幾何学シンポジウム 一佐渡一 2006.6.8.

26. Usui, S., $SL(2)$ -orbit theorem for degeneration of mixed Hodge structures and its geometric applications (with K. Kato and C. Nakayama) The International Symposium on Singularity Theory and its Applications, 北京化工大学, 2006.5.10.

[図書] (計 1 件)

1. Kato, K. and Usui, S. Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures, Ann. Math. Studies 169, 2009, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤木 明 (FUJIKI AKIRA)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 80027383

(2) 研究分担者

満渕 俊樹 (MABUCHI TOSHIKI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 80116102

坂根 由昌 (SAKANE YUSUKE)
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号 00089872

臼井 三平 (USUI SANPEI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 90117002

宮西 正宜 (MIYANISHI MASAYOSHI)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号 80025311

榎 一郎 (ENOKI ICHIRO)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 20146806

並河 良典 (NAMIKAWA YOSHINORI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 80228080

後藤 竜司 (GOTO RYUSHI)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 30252571

大山 陽介 (OHYAMA YOUSUKE)
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号 10221839

本多 宣博 (HONDA NOBUHIRO)
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号 60311809

(3) 連携研究者