

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18340020

研究課題名 (和文) 葉層構造と接触構造の微分位相的研究

研究課題名 (英文) Differential topological study of foliations and contact structures

研究代表者

三松 佳彦 (MITSUMATSU YOSHIHIKO)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：70190725

研究成果の概要：

open book 分解に基づく 3 次元多様体上の葉層構造と接触構造の強い意味で凸性を破るクラスの構成、open book 分解などの場合の接触構造の葉層構造への収束の良いことの証明、収束と (強擬) 凸性の伝播の関連、3 次元多様体上の接触構造とその 4 次元シンプレクティック充填の重要な例の構成、4 次元多様に埋め込まれた曲面の 2 次元葉層のコンパクト葉としての実現問題の解決と応用、など、3, 4 次元多様体上の葉層構造、接触構造、シンプレクティック構造を中心とした幾何学的な結果を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2007年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2008年度	2,300,000	690,000	2,990,000
年度			
年度			
総計	7,500,000	2,250,000	9,750,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：葉層構造, 接触構造, 3次元 Anosov 流, Euler 類, 自己交叉, Thurston の不等式, Thurston-Bennequin の不等式, シンプレクティック構造

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 次元接触構造が葉層構造に収束する状況は 90 年代中ごろから代表者により調べられていたが、Giroux らの仕事により、open book 分解に付随する収束が 2000 年代中ごろから急速に注目を集め始め、これらの場合に (非) 凸性を色々な角度から研究することが重要な課題と認識されるようになった。

(2) 一方、Floer homology 等の方法論で飛躍的な進歩を遂げ始めていたシンプレク

ティック幾何の影響を受け、接触構造にも contact homology が導入され、総合的には symplectic field theory, Heegaard Floer homology theory,  $A-\infty$  構造などとして更なる発展を開始した。一方で、接触構造とシンプレクティック構造の本来のかかわり (シンプレクティック充填、Stein 充填) をより具体的・幾何的に研究すべきであるとの認識も新たに生まれている。

(3) 双曲的な力学系理論と葉層・接触構造

の関連からは、剛性理論との関連が期待されており、葉層コホモロジーと群作用のパラメータ剛性の関連が分かかってき始めていた。これを更に接触構造へ応用することが出来るかどうか？も新しい重要な問題意識の一つとなった。

(4) 変形(または幾何学的)量子化の理論に対しても、具体例の構成に於いて解析的に不必要に難解と思われる理論と非可換幾何(C\*代数とK-理論)が強調され過ぎており、より自然で幾何学的に簡明な理解が求められている。

## 2. 研究の目的

以下では前節の番号を踏襲し、対応させる。

(1) この研究では、3次元及び4次元多様体上の構造が研究対象である。3次元では余次元1葉層構造と接触構造、4次元多様体上では、2次元葉層構造とシンプレクティック構造が主たる研究対象である。接触構造は強擬凸領域の境界としての強擬凸性を幾何的に捉えた奇数次元の空間の幾何構造と考えられるが、そのような意味での凸性を位相的な観点から研究することが本研究の目的の一つの中心である。接触構造の場合、タイト性、若しくはThurston-Bennequinの不等式といった位相的な表現があるが、葉層構造の場合もReeb成分の有無、Thurstonの不等式など同様である。葉層構造に接触構造が収束する場合にこの凸性が伝播するかどうかを調べることも、またこの研究の大きな目標の一つである。それが完成すれば、葉層構造の方での情報と接触構造のサイドの情報がよりよく交換できるようになり、双方での研究がより緊密に交換されることになる。

(2) 一方、3次元接触構造は4次元のシンプレクティック構造に対して、その凸型境界、又はある種の射影化としての関係を持つ。シンプレクティック幾何と接触幾何は不可分な関係にあり、接触幾何にとって、そのシンプレクティック充填、Stein充填の研究は凸性の観点から最も重要な課題の一つである。複素曲面の孤立特異点のリンクとして得られる3次元接触構造に対して、そのシンプレクティック充填の(非)一意性を調べる問題は、3次元接触構造と4次元シンプレクティック幾何にまたがる重要な課題の一つであり、本研究の目的の一つである。

(3) 以上が3次元多様体上の葉層構造、接触構造、及び4次元多様体上のシンプレクティック構造に関する中心的な研究目標であるが、これらを更に微分トポロジー、力学系的な観点から総合的にとらえた研究を展開することも本研究の重要な課題であった。特に変形量子化または幾何学的量子化と以上のような幾何構造の関係を調べることも、または幾何構造の分類等に量子化がどうかかわるか

を調べることなどが挙げられる。より具体的には、双曲面の変形量子化の幾何学的実現として、測地流がなすAnosov流に付随するAnosov葉層と双接触構造への変形を使って、現れた接触構造のタイト性を証明することが大きな目標の一つであった。

(4) また、幾何学的量子化が良い形で実現されるtoric多様体の場合などを雛形として、contact homologyの受け皿になりうるhomology論の構成も、当初の目標であった。

## 3. 研究の方法

数学的な観点からは、本研究は幾つかの特徴的かつ対照的な手法を用いている。

葉層構造への接触構造の収束の問題に関しては、h-原理の実現にしばしば不可避な、ホモトピー的・抽象的でありながら、同時に高度に具体的で幾何的方法をとる。

open book分解に関しては、極めて明瞭な幾何的方法と、整理された代数的トポロジーの手法が自然に融合される。

接触構造の研究に関する総合的な見地からは、接触構造を1次元高いシンプレクティック構造の境界又は射影化と見るのが一般的であるが、以前より代表者が提案している、1次元低いシンプレクティック構造の(変形)量子化とみなす考え方が、本研究を支配している。以上が本研究の、数学的な技法・思想からの方法論の特徴と言える。

更により広い数学的な観点から、将来への発展も見込んだ情報収集が一つの大きな特徴である。これには主に二つの側面があり、一つは、直接的に数学的な思想として、無限次元の接触流又はHamilton力学系としての流体力学を常に取り込んでいることである。流体力学を、数理物理・解析・応用解析などの位置づけに置かず、幾無限次元の何・力学系として取り込む観点が、将来への大きな発展の基盤になると考えられている。論文⑬、学会発表⑰などで成果を発表している。

もう一点は、更に数学的により広範な見通しを得るためにENCOUNTER with MATHEMATICSという集会を企画・運営していることである(主な発表論文等[その他]②)。平成18年度から20年度の間に13回のEwMを開催し、代数・解析・幾何を超えたあらゆる数学の分野からの視点の拡大を図ったが、この3年間では特に数理物理に関する微分方程式に多くの回を割いた。

また、2006年に微分同相群の国際会議を主催し、それを機に論文集の編纂(その他①)を行った。特に論文集の編纂は、将来への研究の発展の礎となるのみならず、既に、上に述べた坪井の研究成果(論文⑩)を生み出す直接的な基盤となっている。

その他には、例年1月に開催される接触構

造論のシンポジウムを支援し、研究グループ内外の情報交換も行った。また、例年 10 月ごろ開催される葉層構造論シンポジウムについても同様である。更に、毎週東京工業大学にて行われている葉層構造・接触構造を中心的テーマとしたセミナーは代表者、連携研究者の松元が中心となっており、研究組織内の情報交換を頻繁に行った。

#### 4. 研究成果

以下の番号付けは第 1・2 節の番号に概ね対応させてある。

(1) 3次元接触構造は必ず open book 分解に付随し、その同値関係もよく理解されるようになった。また open book 分解には標準的に回転可能葉層が付随する。更にこの場合に接触構造は葉層構造にほぼ標準的に収束する。本研究では、絶対的 Thurston 不等式が破られる(即ち、強い意味で「凸ではない」)回転可能葉層のクラスをモノドロミーの言葉で与えた(代表者と分担者三好らによるこの結果は論文①にまとめられ、学会発表②、③などで発表された)。

また三好らは、その特殊な場合に、open book 分解の芯を Dehn filling し直した場合、可算無限通りのうち有限通りだけが Thurston の不等式を破ることを見出した(論文②, 学会発表③, ④)。

従ってモノドロミーを指定して Dehn filling を加えた場合の一般的な状況が問題となる。また、Dehn filling の場合も open book の場合と同様に接触構造が葉層構造に収束する。Dehn filling の場合も含めて、接触構造に横断的な結び目はそのような結び目だけの中で葉層構造にも変形できること、即ち Bennequin の補題がこれらの場合に完全の証明され(論文④, ⑤, 学会発表①~③, ⑥, ⑬, ⑳)、これらのクラスでは、葉層構造と接触構造の凸性に差が生じ無いことが確認された。

(2) 連携研究者の小野、太田はよりシンプレクティック幾何に重心を置いて研究を進めた。Floer homology 等におけるホモトピー論的な枠組みの研究と flux 予想などの問題、3次元接触構造のシンプレクティック充填の研究を主に進めた。前者については全体の枠組みが進展している(論文⑦, ⑫, ⑱, ⑲, 学会発表⑦, ⑧, ⑭, ⑳, ㉑, ㉒)。シンプレクティック充填に関しては、これまでのそれが一意であるものの研究に対し、無限に存在する場合を構成した(論文⑥, ⑬)。

(3) 連携研究者の松元は、代表者とのこれまでの共同研究で得た 3次元 Anosov 葉層における葉層コホモロジーの研究を進展させ、流れのパラメタ剛性の研究に応用し、Katok 予想の解決に至った(論文③, ⑤, ⑰, 学会発表⑩~⑫, ㉓)。また、連携研究者坪

井は、シンプレクティック・ハミルトン若しくは保積微分同相群などの保存系ではなく一般の微分同相群であれば殆どの多様体の場合に、微分同相群が一様完全性を持つことを突き止めた(論文⑩)。これは微分トポロジーの観点からは大きな結果であるが、保存系で正反対の方向の研究が始まり、それに触発された結果である点が本研究の真髄に深くかかわる点である。これには海外共同研究者の Dieter Kotschick 氏の研究が大きく寄与している。また坪井は、接触微分同相群の単純性も証明し、論文⑪に発表した。

(4) (この小項目は第 1・2 節の 4)には対応しない。むしろ 2) 及び特に 3) に強く関連する成果である。)

さらに、4次元多様体に埋め込まれた閉曲面が 2次元葉層構造のコンパクト葉として実現されるための (コ) ホモロジカルな必要十分条件が得られた。応用として、与えられた多様体上の葉層のコンパクト葉の自己交叉が非有界になる族の構成が多く得られ、また、4次元ユークリッド空間の任意のトーラス結び目が遠方で自明な葉層のコンパクト葉として実現できることなどが分かった。これは代表者と海外共同研究者の Elmar Vogt 氏の共著論文⑧(及び学会発表⑬, ⑭, ⑳~㉑)に発表された。

(5) 今後の展開、展望について。Open book 分解と接触構造の葉層構造への収束の問題については、Dehn filling の場合に凸構造と非凸構造の分布の解明、収束の良否の一般論、更には、高次元化の問題が今後衷心的な問題として問われることになるであろう。特に高次元での可旋接触構造の概念の定式化などと深く関わる重要な課題となる。4次元多様体上の 2次元葉層の問題に関しては、既にシンプレクティック構造との関わりが論文にも指摘されているが、そのような理論的な方向と、応用の両側面が今後に期待されている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 21 件)

① H. Kodama, Y. Mitsumatsu, S. Miyoshi & A. Mori; 'On Thurston's inequality for spinnable foliations', To appear in Proc. PAULFEST, Contemporary Math., American Math. Soc. 査読有

② Shigeaki Miyoshi and Atsuhide Mori; 'Reeb components and Thurston's inequality', To appear in Proc. PAULFEST, Contemporary Math., American Math. Soc. 査読有

③ Shigenori Matsumoto; The parameter

rigid flows on orientable 3-manifolds, To appear in Contemporary Math. A.M.S.. 査読有

- ④ Yoshihiko Mitsumatsu; 'On Bennequin's isotopy lemma and Thurston's inequality', to appear in Proc. ICDG VIII. 査読有
- ⑤ Shigenori Matsumoto; Rigidity of locally free Lie group actions and leafwise rigidity, To appear in Su<sup>gaku</sup> Exposition, AMS, 査読有
- ⑥ Hiroshi Ohta and Kaoru Ono; An inequality for symplectic fillings of the Link of a hypersurface K3 singularities, To appear in Proc. Postnikov Memorial Conference, Banach Center Publications. 査読有
- ⑦ K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono; Canonical models of filtered  $A_\infty$ -algebras and Morse complexes, To appear in Proceedings of Yashafest. 査読有
- ⑧ Yoshihiko Mitsumatsu and Elmar Vogt; 'Foliations and compact leaves on 4-manifolds I: Realization and self-intersection of compact leaves', Advanced Studies in Pure Math. 'Groups of Diffeomorphisms', Math. Soc. Japan, 52, 415-442, (2008). 査読有
- ⑨ T. Yokoyama and T. Tsuboi; Codimension one minimal foliations and the fundamental groups of leaves, Annale de l'Institut Fourier, Grenoble, 58-2, 723-731 (2008). 査読有
- ⑩ Takashi Tsuboi; On the simplicity of contact diffeomorphism groups, Advanced Studies in Pure Math. 'Groups of Diffeomorphisms', Math. Soc. Japan, 52, 491-504 (2008) 査読有
- ⑪ Takashi Tsuboi; On the uniform perfectness of diffeomorphism groups, Advanced Studies in Pure Math. 'Groups of Diffeomorphisms', Math. Soc. Japan, 52, 505-524 (2008) 査読有
- ⑫ Kaoru Ono; A question analogous to the flux conjecture concerning, Proc. Of Gokova Geometry-Topology Conference 2007, 1-14, (2008) 査読有
- ⑬ Hong Van Le and Kaoru Ono; Parameterized Gromov-Witten invariants and topology of symplectomorphism groups, Advanced Studies in Pure Math. 'Groups of Diffeomorphisms', Math. Soc. Japan, 52, 51-75 (2008) 査読有
- ⑭ Hiroshi Ohta and Kaoru Ono; Examples of isolated surface singularities whose links have infinitely many symplectic fillings, J. Fixed Point Theory and Applications, 51-56, (2008) 査読有

⑮ 三松 佳彦; 「リーマン様体上の流体運動方程式の幾何学的基礎」, 日本流体力学会誌「ながれ」(特別寄稿), 27-2, 41-50, (2008) 査読無

- ⑯ Yoshihiko Mitsumatsu; 'Linking pairing and foliated cohomology', Abstracts of the International Congress of Mathematicians Madrid, 301-302, (2006). 査読有
- ⑰ 松元 重則; 「局所自由リー群作用の剛性と葉向コホモロジー」, 雑誌「数学」(日本数学会), 58-2, 86-101, (2006).
- ⑱ Kaoru Ono; 'Floer-Novikov cohomology and the flux conjecture', Geometric and functional analysis 16, 981-1020, (2006). 査読有.
- ⑲ Kaoru Ono; 'Development in symplectic Floer theory', Proceedings of International Congress of Mathematicians Madrid 2006, 1061-1082, (2006). 査読有.
- ⑳ Yoshihiko Mitsumatsu; 'Convergence of contact structure to foliations', Foliations 2005; Proc. International Conf. Lodz, Poland, World Scientific, 353-365, (2006). 査読有
- ㉑ Atsuhide Mori and Yoshihiko Mitsumatsu; 'On Benequin's isotopy lemma', Appendix to 'Convergence of contact structure to foliations, Foliations 2005; Proc. International Conf. Lodz, Poland, World Scientific, (2006), 365-371. 査読有

[学会発表] (計36件)

- ① 三松 佳彦; 「Bennequin's isotopy lemma」, トポロジープロジェクト研究集会「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」, 2009年1月30日、岐阜.
- ② 三松 佳彦; 「Open Book 分解から見た葉層構造と接触構造の(非)凸性と接触構造の葉層構造への収束」, 葉層の微分幾何とベルグマン核, 2008年12月16日、京都大学数理解析研究所.
- ③ 三松 佳彦; 「Bennequin's isotopy Lemma について」, 葉層構造論シンポジウム, 2008年10月31日、東京大学玉原国際研究所.
- ④ 坪井 俊; 「多様体の微分同相群」日本数学会秋季総合分科会、総合講演、2008年9月25日、東京工業大学
- ⑤ Takashi Tsuboi; On the uniform perfectness of the group of diffeomorphisms, VIII International Colloquium on Differential Geometry, July 9, 2008, Santiago de Compostela, Spain
- ⑥ Yoshihiko Mitsumatsu; On Bennequin's isotopy lemma, VIII International

Colloquium on Differential Geometry, July 8, 2008, Santiago de Compostela, Spain

- ⑦ Kaoru Ono; Floer-Novikov cohomology and symplectic fixed points, CRM, Floer theory and symplectic dynamics, May 20, 2008, Universite de Monreal, Canada
- ⑧ Kaoru Ono; Floer theory for Lagrangian submanifolds, the 46th Cornell Topology Festival, May 2-5, 2008, Cornell Univ. U. S. A.
- ⑨ 坪井 俊; 「微分同相群の一様完全性について」, 研究集会「同相群とその周辺」, 2008年2月19日, 京都産業大学、京都
- ⑩ Shigenori Matsumoto; `The parameter rigid flows on 3-manifolds', Probabilistic and Dynamical Aspects of (Semi)Group Actions, 2008年1月11日, Santiago, Chili.
- ⑪ Shigenori Matsumoto; `The parameter rigid flows on 3-manifolds', International Conference on Topology and its Applications, 2007年12月15日, 京都大学.
- ⑫ 松元 重則; `Parameter rigid flows on 3-manifolds', 葉層構造論シンポジウム, 2007年11月1日, 東京大学玉原国際研究所.
- ⑬ 児玉 大樹, 三松 佳彦, 森 淳秀, 三好 重明; 「葉層構造に対する Thurston の不等式について 1, 2, 3, 4」, 葉層構造論シンポジウム, 2007年10月30日, 31日, 東京大学玉原国際研究所
- ⑭ K. Fukaya, H. Ohta and K. Ono; `Lectures on algebraic aspects on filtered  $A_\infty$ -algebras', AIM workshop ``Toward relative symplectic field theory'', September 23-29, 2007, CUNY, New York, U. S. A.
- ⑮ Hitoshi Moriyoshi; `Twisted Index Theorem and Its Geometric Applications', International Workshop 2007 Towards a New Basic Science: Depth and Synthesis, 2007年9月11日, 大阪大学.
- ⑯ Yoshihiko Mitsumatsu; `2-dimensional foliations and compact leaves on 4-manifolds', Intelligence of Low Dimensional Topology, 2007年8月30日, 大阪市立大学
- ⑰ Yoshihiko Mitsumatsu; `2-dimensional foliations and compact leaves on 4-manifolds', Foliation, Topology, and Geometry, 2007年8月10日, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil
- ⑱ Shigenori Matsumoto; `Parameter rigid flows on 3-manifolds', Foliation, Topology, and Geometry, 2007年8月10日, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil.

- ⑲ Takashi Tsuboi; `On the group of real analytic Diffeomorphisms', Foliation, Topology, and Geometry, 2007年8月10日, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil.
- ⑳ Shigeaki Miyoshi; `Thurston's Inequality for Spinnable Foliations and Dehn Fillings', Foliation, Topology, and Geometry, 2007年8月8日, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil.
- ㉑ Hitoshi Moriyoshi; `Twisted Index Theorem and its geometric applications', Spectral Analysis in Geometry and Number Theory, 2007年8月6日, 名古屋大学.
- ㉒ Kaoru Ono; `An analogous question to the flux conjecture for Lagrangian submanifolds', Symplectic Geometry, July 1-5, 2007, ETH Zurich, Switzerland.
- ㉓ Hiroshi Ohta; `Symplectic fillings and normal singularities', Algebraic Topology: Old and New, Postnikov Memorial Conference, June 18-24, 2007, Banach International Math. Center, Bedlewo, Poland.
- ㉔ Kaoru Ono; `Floer-Novikov cohomology and symplectic fixed points', Algebraic Topology: Old and New, Postnikov Memorial Conference, June 18-24, 2007, Banach International Math. Center, Bedlewo, Poland.
- ㉕ Shigenori Matsumoto; `Parameter rigid flows on 3-manifolds', 3eme Colloque Maghrebin de Geometrie, Topologie et Systemes Dynamiques, 2007年6月1日, Marrakech, Morocco.
- ㉖ Kaoru Ono; `Floer theory for Lagrangian submanifolds and an analog of the flux conjecture for Lagrangian submanifolds' Gokova Geometry-Topology Conference, May 28-June 2, 2007, Gokova, Turkey.
- ㉗ 三松 佳彦; 「多様体上の流体力学の幾何学的基礎付けについて」, 第56回理論応用力学講演会, 2007年3月7日, 日本学術会議, 東京.
- ㉘ 三松 佳彦; 「4次元多様体上の2次元葉層構造とコンパクト葉」, Geometry and Something, 2007年2月1日, 福岡大学セミナーハウス, 福岡.
- ㉙ 三松 佳彦; 「4次元多様体上の2次元葉層とコンパクト葉の構成」, 同相群とその周辺, 2006年12月22日, 京都工芸繊維大学.
- ㉚ 三松 佳彦; 「4次元多様体上の2次元葉層とコンパクト葉の自己交差」, 葉層構造論研究集会, 2006年10月24日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.
- ㉛ Kaoru Ono; `Floer-Novikov cohomology and its applications', International Symposium on Groups of Diffeomorphisms

2006, 2006年9月14日, 東京大学.

- ③② Yoshihiko Mitsumatsu; 'Asymptotic linking pairing and foliated cohomology', International Symposium on Groups of Diffeomorphisms 2006, 2006年9月12日, 東京大学.
- ③③ Takashi Tsuboi; 'On the group of real analytic diffeomorphisms', International Symposium on Groups of Diffeomorphisms 2006, 2006年9月12日, 東京大学.
- ③④ Yoshihiko Mitsumatsu; 'Linking and foliated cohomology', International Congress of Mathematicians Madrid 2006, 2006年8月29日, Madrid.
- ③⑤ Kaoru Ono; 'Development in symplectic Floer theory', International Congress of Mathematicians Madrid 2006, Invited talk, 2006年8月26日, Madrid.
- ③⑥ Yoshihiko Mitsumatsu; 'On Thurston's inequality for spinnable foliations', VII Workshop on Symplectic and Contact Topology (GESTA 2006), 2006年8月16日, Madrid.

[図書] (計1件)

- ①坪井 俊; 東大出版会, 「幾何学Ⅲ 微分形式」, (2008) 248pp.

[その他] (計2件)

- ① Edited by Y. Mitsumatsu (chief editor), T. Tsuboi et al.; Mathematical Society of Japan, Advanced Studies in Pure Mathematics 52, 'Groups of Diffeomorphisms', (2008), 524pp+xii.
- ② ENCOUNTER with MATHEMATICS 運営の記録  
<http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH/>  
参照のこと。

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

三松 佳彦 (MITSUMATSU YOSHIHIKO)  
中央大学・理工学部・教授  
研究者番号: 70190725

### (2) 研究分担者

三好 重明 (MIYOSHI SHIGEAKI)  
中央大学・理工学部・教授  
研究者番号: 60166212

### (3) 連携研究者

松元 重則 (MATSUMOTO SHIGENORI)

日本大学・理工学部・教授

研究者番号: 80060143

坪井 俊 (TUBOI TAKASHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 40114566

小野 薫 (ONO KAORU)

北海道大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 20204232

太田 啓史 (OHTA HIROSHI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・

教授

研究者番号: 50223839

森吉 仁志 (MORIYOSHI HITOSHI)

慶應義塾大学・理工学部・准教授

研究者番号: 00239708