

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2006～2009

課題番号：18340022

研究課題名（和文） Terwilliger algebra の表現とその応用

研究課題名（英文） Representations of Terwilliger algebras and their applications

研究代表者

伊藤 達郎（ITO TATSURO）

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：90015909

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード: association scheme, P- and Q-polynomial scheme, Terwilliger algebra, TD-pair, Leonard pair, code, design, 極値集合

1. 研究計画の概要

本研究は、Bose-Mesner algebra の表現の上に構築されていた従来の代数的組合せ論を、それを含みかつそれよりはるかに大きな algebra であるところの T-alg の表現の上に再構築することをめざしている。表現論はもちろん格段に難しくなるが、組合せ構造のはるかに精密な解析が可能になる。本研究の第一の目的は、P- and Q-poly scheme に付随する T-alg の既約表現を決定することである。まず代数のレベルで既約表現を決定し、次に組合せ論のレベルで既約表現を決定する、すなわち標準加群の既約成分への分解を決定する。第二の目的は、関連する組合せ構造の研究を T-alg の表現を通して行うことである。関連する組合せ構造としては、まず P- and Q-poly scheme そのもの（の分類）を研究対象とし、つぎに P- and Q-poly scheme（あるいはそれに近い構造を持つ基礎空間）における code と design および極値集合を研究対象としている。これらの研究対象は、古典的な code と design および極値集合を特別な場合として含む。また理論的枠組みとしては、本研究は、従来の Delsarte 理論を特別な場合として含む。

2. 研究の進捗状況

(1) P- and Q-polynomial scheme の Terwilliger algebra の既約表現の分類につ

いて、標準的生成元が q-Serre relations をみたし、q が root of unity でないとき、(I) highest weight space の次元は 1 になることをまず示した(shape 予想の解決)。次にこの結果を用いて、同じ条件の下に、(II) 既約表現はすべて、アフィン量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2^-)$ の既約表現から得られることを示し、更に (III) アフィン量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2^-)$ のどの既約表現から得られるかは、Drinfeld polynomial によって判定されることを示した。

(2) TD-pair という概念を導入し P- and Q-polynomial scheme の Terwilliger algebra の既約表現の決定問題を TD-pair の分類に帰着し、更に augmented tridiagonal algebra という無限次元代数を導入し TD-pair の分類問題を augmented tridiagonal algebra の有限次元既約表現の分類に帰着した。(1) 及びこの準備をした上で、generic な q に対して P- and Q-polynomial scheme の Terwilliger algebra の既約表現の分類を完成した。副産物として、Onsager algebra の q-analogue を定義し、その有限次元既約表現を決定した。

(3) P- and Q-polynomial scheme の部分集合の width と dual width の和が丁度直径に一致するときこの部分集合に P- and Q-polynomial scheme の構造が入るが、その部分構造の parameters を決めることが出来た。これによって、はじめの P- and Q-polynomial scheme が今まで知られている

もの場合、このような部分集合 (Erdos-Ko-Rado type の極値集合を含む) を分類することが出来た。Terwilliger algebra の表現を P- and Q-polynomial association scheme の分類及び code 理論に応用するための基礎工事として、displacement 0 の表現を詳しく調べる研究が進行中である。Brouwer-Koolen et al による $w+w=d$ 理論を Terwilliger algebra の表現の枠組みで捉えなおすことが可能となった。

3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。

(理由)

P- and Q-poly scheme に付随する T-alg の既約表現を generic な場合に決定するという breakthrough があり、その結果は当初の予想を上回る美しいものであった。それを基にした新たなプログラムの下に P- and Q-polynomial scheme の分類問題に着手することが可能となった。また displacement 0 の表現という新たな重要な概念が導入された。これらの成果を受けて、code, design, 極値集合など様々な組合せ論的对象への T-alg の表現論の応用について新たな可能性の模索が始まった。

4. 今後の研究の推進方策

当面の具体的な研究計画は以下のとおりである。 \mathcal{X} を P- and Q-poly scheme とする。

(a) type I で q が仮想的に 1 の冪根の場合に、 q のみによる (\mathcal{X} の他の parameters にはよらない) universal な無限次元代数 \mathcal{T} であって \mathcal{X} の Terwilliger algebra の既約表現から \mathcal{T} の有限次元既約表現が生じるようなものを定める。次に \mathcal{T} の有限次元既約表現を決定する。更にこの結果を踏まえ type II, type III に対しても同様な universal な無限次元代数 \mathcal{T} を定め、その有限次元既約表現を決定する。

(b) 「 \mathcal{X} の標準加群の既約成分が endpoint 1 の場合、その表現は高々2個の thin な表現のテンソル積となり、endpoint 2 の場合、その表現は高々3個の thin な表現のテンソル積となる」ことを示す。この結果を用いて \mathcal{X} の endpoint 2 までの局所構造を決定する。またいくつかの典型的な局所構造をもつ場合を取り上げて実際に \mathcal{X} を決定する。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計49件)

1. T.Ito and P.Terwilliger, Tridiagonal pairs of q -Racah type, accepted for publication in J. Algebra, 査読有. 掲載確定
2. T.Ito and P.Terwilliger, Distance regular graphs and the q -tetrahedron algebra, Europ. J. of Combinatorics 30 (2009), no. 3, 682-697, 査読有.
3. T.Ito and P.Terwilliger, Finite dimensional irreducible modules for the three-point \mathfrak{sl}_2 loop algebra, Comm. Algebra 36 (2008), no. 12, 4557-4598, 査読有.
4. T.Ito and P.Terwilliger, Two non-nilpotent linear transformations that satisfy the cubic q -Serre relations, J. Algebra Appl. 6 (2007), no. 3, 477-503, 査読有.
5. T.Ito and P.Terwilliger, Tridiagonal pairs and the quantum affine algebra $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, Ramanujan J. 13 (2007), no. 1-3, 39-62, 査読有.

[学会発表] (計48件)

1. T.Ito, The q -Onsager algebra, Geometric and Algebraic Combinatorics 4, Oisterwijk, The Netherlands, August 19, 2008.
2. T.Ito, Irreducible representations of the Terwilliger algebra of a P- and Q-polynomial association scheme, The Com²MaC Conference on Applications of Group Theory to Combinatorics, POSTECH, July 10, 2007.
3. T.Ito, The q -Onsager algebra and its finite dimensional irreducible representations, The second Internatinal Congress in Algebra and Combinatorics, Beihang University, Beijing, China, July 7, 2007.
4. T.Ito, Irreducible representations of the Terwilliger algebra of a P- and Q-polynomial association scheme II, Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, Pusan National University, February 11, 2007.
5. T.Ito, Irreducible representations of the Terwilliger algebra of a P- and Q-polynomial association scheme, Japan-Korea Workshop on Algebra and Combinatorics, 九州大学理学部, October 21, 2006.