

平成22年 5月 17日現在

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2006～2009

課題番号：18340022

研究課題名（和文）Terwilliger algebra の表現とその応用

研究課題名（英文）Representations of Terwilliger algebras and their applications

研究代表者

伊藤 達郎（ITO TATSURO）

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：90015909

研究成果の概要（和文）：離散的空間の研究が近年ますます重要性を増している中で、本研究はその中でも対称性が極めて高くそれ故に応用も広い離散的対称空間について、表現論という代数的手法の基礎理論を構築し、幾何学的側面の研究へその応用の道を開拓した。rank 1 の離散的対称空間に附随する Terwilliger algebra の generic な既約表現を決定したことは特筆すべき breakthrough である。

研究成果の概要（英文）：We have established a basic theory of representations as a tool for the investigations of discrete symmetric spaces of rank one, and applied it to study combinatorial objects that are most naturally formulated in this algebraic framework. Particularly, we determined the generic irreducible representations of Terwilliger algebras.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	5,300,000	1,590,000	6,890,000
2007年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2008年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2009年度	2,900,000	870,000	3,770,000
年度			
総計	14,000,000	4,200,000	18,200,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：association scheme, P- and Q-polynomial scheme, Terwilliger algebra, TD-pair, Leonard pair, code, design, 極値集合

1. 研究開始当初の背景

従来の代数的組合せ論は

E. Bannai-T. Ito, Algebraic Combinatorics I:

Association Schemes, Benjamin/Cummings Lecture Note Series, 1984

に見られるように Bose-Mesner algebra の表現論の上に構築されていた。1990年代に Terwilliger により Bose-Mesner algebra を

含みかつそれよりはるかに大きな algebra (Terwilliger algebra) が導入され、代数的組合せ論を Terwilliger algebra の表現論の上に再構築すべきであるという機運が高まってきた。表現論はもちろん格段に難しくなるが、それによる組合せ構造の解析ははるかに精密になるからである。

## 2. 研究の目的

本研究の第一の目的は、 $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme (compact symmetric space of rank 1 の離散の類似物) に付随する Terwilliger algebra の既約表現を決定することである。この意味は、まず代数のレベルで既約表現を決定すること、次に組合せ論のレベルで既約表現を決定すること、すなわち  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme によって定まる標準加群の既約成分への分解を決定するということである。

第二の目的は、関連する組合せ構造の研究を Terwilliger algebra の表現を通して行うことである。関連する組合せ構造としては、まず  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme そのもの(の分類)を研究対象とし、つぎに  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme (あるいはそれに近い構造を持つ基礎空間)における code と design および極値集合を研究対象としている。

これらの研究対象は、古典的な code と design および極値集合を特別な場合として含む。また理論的枠組みとしては、本研究は、従来の (Bose-Mesner algebra の枠組みで定式化されているところの) Delsarte 理論を特別な場合として含む。

## 3. 研究の方法

本研究は、研究組織欄に記載した研究代表者および連携研究者(研究分担者)の9名に Paul Terwilliger (Wisconsin 大学・教授)、Jack Koolen (Pohang 工科大学・准教授)、田中 太初 (東北大学・情報科学研究科・助教)、田上 真 (東北大学・理学研究科・助教)の4名の研究協力者を加えた計13名で行った。

Terwilliger algebra の表現そのものの研究は主に、伊藤、Terwilliger、野村、田辺、田上が受け持った。Terwilliger algebra の表現論の応用の研究に関しては、距離正則グラフについては平木、Koolen が、 $P$ - and  $Q$ -polynomial scheme の部分構造に関しては田中、鈴木が、code, lattice, (spherical)

design については坂内、宗政、吉荒が、低次元トポロジーについては川越が主に受け持った。

初年度の2006年に仙台で百人規模の国際会議を開催したほかに、この研究組織のメンバーが中心となって日韓 workshop を毎年日本と韓国で1回づつ主催した(日本側の開催地は九州大学)。また毎年 Terwilliger が1ヵ月ほど来日して金沢大学において共同研究を行った。

## 4. 研究成果

本研究では二つの大きな breakthrough があった。ひとつは  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme に付随する Terwilliger algebra の generic な既約表現を決定したことである。この結果は  $q$ -Onsager algebra の有限次元既約表現の決定を実質的に含んでいる。今後の代数的組合せ論はこの成果の上に展開していくであろう。

もうひとつは距離正則グラフに関する Bannai-Ito 予想が肯定的に解決されたことである。すなわち、次数が3以上の距離正則グラフは次数を与えると有限個しか存在しないことが示された。この結果は長い間の懸案の難問であったが最近 Koolen に率られるグループによって証明された(まだ preprint)。本研究グループが最終的に解決したわけではないが、坂内、伊藤を中心とする本研究グループと Koolen との研究交流の歴史を見れば、この予想の解決に対する本研究グループの寄与は半分かそれ以上とみなしてよいだろう。

$P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme が部分構造としてもうひとつの  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme を含む場合の研究が格段に進んだ。この研究は、Terwilliger algebra の表現論の応用としてなされたが、従来の completely regular code の理論や極値集合の理論を統一的に一般化したものになっている。今後  $P$ - and  $Q$ -polynomial scheme の標準加群の既約分解理論が更に深化すれば、更なる重要な応用が開発されることが期待される。それにより  $P$ - and  $Q$ -polynomial scheme の分類問題の研究が促進されることが期待される。

最後に Terwilliger algebra の表現論が低次元トポロジー、整数論、確率論、数理論理など他の数学の分野と密接にかかわりあっていることが最近次々に分かってきていることを指摘しておきたい。特に XXZ model、

量子確率論の研究において Terwilliger algebra が有力な道具となることが期待される。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 83 件)

1. T. Ito and P. Terwilliger, The augmented tridiagonal algebra, Kyushu J. Math. 64 (2010), 81–144. 査読有
2. T. Ito and P. Terwilliger, Tridiagonal pairs of  $q$ -Racah type, J. Algebra 322 (2009), no. 1, 68–93. 査読有
3. T. Ito and P. Terwilliger, The Drinfel'd polynomial of a tridiagonal pair, J. of Combinatorics, Information & System Sciences 34 (2009), no. 1–4, 255–292. 査読有
4. T. Ito and P. Terwilliger, Distance regular graphs of  $q$ -Racah type and the  $q$ -tetrahedron algebra, Michigan Math. Journal 58 (2009), no. 1, 241–254. 査読有
5. T. Ito and P. Terwilliger, Distance regular graphs and the  $q$ -tetrahedron algebra, European J. of Combin. 30 (2009), no. 3, 682–697. 査読有
6. T. Ito and P. Terwilliger, Finite dimensional irreducible modules for the three-point  $\mathfrak{sl}_2$  loop algebra, Comm. Algebra 36 (2008), no. 12, 4557–4598. 査読有
7. T. Ito and P. Terwilliger, Tridiagonal pairs of Krawtchouk type, Linear Algebra Appl. 427 (2007), no. 2–3, 218–233. 査読有
8. T. Ito and P. Terwilliger,  $q$ -inverting pairs of linear transformations and the  $q$ -tetrahedron algebra, Linear Algebra Appl. 426 (2007), no. 2–3, 516–532. 査読有
9. T. Ito and P. Terwilliger, Two non-nilpotent linear transformations that satisfy the cubic  $q$ -Serre relations, J. Algebra Appl. 6 (2007), no. 3, 477–503. 査読有
10. T. Ito and P. Terwilliger, The  $q$ -tetrahedron algebra and its finite dimensional irreducible modules, Comm. Algebra 35 (2007), no. 11, 3415–3439. 査読有
11. T. Ito and P. Terwilliger, Tridiagonal pairs and the quantum affine algebra  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ , Ramanujan J. 13

(2007), no. 1–3, 39–62. 査読有

12. Tatsuro Ito, Paul Terwilliger and Chih-wen Weng, The quantum algebra  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  and its equitable presentation, J. Algebra 298 (2006), no. 1, 284–301. 査読有

[学会発表] (計 111 件)

1. T. Ito, Association Schemes 入門, 織田ゼミ, 東京大学, 11–13, March, 2010
2. T. Ito, Towards the classification of  $P$ - and  $Q$ -polynomial association schemes Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, POSTECH, 6 February, 2010
3. T. Ito, Towards the classification of  $P$ - and  $Q$ -polynomial association schemes, JAIST Workshop on METRIC GRAPH THEORY, Kanazawa Culture Hall, November 12, 2009
4. T. Ito, TD-pair の分類について, ミニ集会「代数的組合せ論」, 九州大学, 2009年3月18日
5. T. Ito, The  $q$ -Onsager algebra, 有限群・頂点作用素代数と組合せ論研究集会, 京都大学数理解析研究所, 2009年1月8日
6. T. Ito, The  $q$ -Onsager algebra, Geometric and Algebraic Combinatorics 4, Oisterwijk, The Netherlands, August 19, 2008
7. T. Ito, The  $q$ -Onsager algebra, 第20回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2008年8月1日
8. T. Ito, Irreducible representations of Terwilliger algebras for  $P$ - and  $Q$ -polynomial association schemes, 「第25回代数的組合せ論」, 北海道大学学術交流会館, June 23, 2008
9. T. Ito, The  $q$ -Onsager algebra, 岡山大学談話会, May 8, 2008
10. T. Ito, Classification of TD-pairs, ミニ集会「代数的組合せ論」. 神戸学院大学ポートアイランドキャンパス, March 22, 2008
11. T. Ito, Finite-dimensional irreducible representations of the augmented tridiagonal algebra, mini-workshop on algebraic combinatorics, POSTECH, February 4, 2008
12. T. Ito, The augmented tridiagonal algebra, Algebras, Groups and Geometries in Tambara, Tambara International Seminar House, October 17, 2007
13. T. Ito, Irreducible representations of the Terwilliger algebra of a  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme, The Com<sup>2</sup>MaC Conference on Applications of Group Theory to Combinatorics, POSTECH,

July 10, 2007

14. T.Ito, The  $q$ -Onsager algebra and its finite dimensional irreducible representations,

The second Internatinal Congress in Algebra and Combinatorics, Beihang University, Beijing, China, July 7, 2007

15. T.Ito, The Onsager algebra revisited from a combinatorial viewpoint, 組合せ論 $\Xi$ 二集会, 九州大学理学部, March 5, 2007

16. T.Ito, Irreducible representations of the Terwilliger algebra of a  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme III, Mini-workshop in Algebraic Combinatorics, POSTECH, February 12, 2007

17. T.Ito, Irreducible representations of the Terwilliger algebra of a  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme II, Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, Pusan National University, February 11, 2007

18. T.Ito, Irreducible representations of the Terwilliger algebra of a  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme, Japan-Korea Workshop on Algebra and Combinatorics, 九州大学理学部, October 21, 2006

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

伊藤 達郎 (ITO TATSURO)  
金沢大学・数物科学系・教授  
研究者番号：90015909

### (2) 連携研究者

坂内 英一 (BANNAI EIICHI)  
九州大学・数理学研究院・名誉教授  
研究者番号：10011652  
(H18→H19: 研究分担者)

宗政 昭弘 (MUNEMASA AKIHIRO)  
東北大学・情報科学研究科・教授  
研究者番号：50219862  
(H18→H19: 研究分担者)

平木 彰 (HIRAKI AKIRA)  
大阪教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号：90294181  
(H18→H19: 研究分担者)

鈴木 寛 (SUZUKI HIROSHI)  
国際基督教大学・教養学部・教授  
研究者番号：10135767

(H18→H19: 研究分担者)

吉荒 聡 (YOSHIARA SATOSHI)  
東京女子大学・文理学部・教授  
研究者番号：10230674  
(H18→H19: 研究分担者)

野村 和正 (NOMURA KAZUMASA)  
東京医科歯科大学・教養部・名誉教授  
研究者番号：40111645  
(H18→H19: 研究分担者)

田辺 顕一郎 (TANABE KENICHIRO)  
北海道大学・理学研究院・准教授  
研究者番号：10334038  
(H18→H19: 研究分担者)

川越 謙一 (KAWAGOE KENICHI)  
金沢大学・数物科学系・講師  
研究者番号：50293337  
(H18: 研究分担者)