

平成 22 年 5 月 12 日現在

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2006～2009

課題番号：18340023

研究課題名（和文） 準周期タイリングの数理とその応用

研究課題名（英文） Mathematics of quasi-periodic tilings and their applications

研究代表者

伊藤 俊次 (ITO SHUNJI)

金沢大学・自然科学研究科・特任研究員

研究者番号：30055321

研究成果の概要（和文）：我々は、諸分野にみられる準結晶（準周期タイリング）の生成の仕組みを、 n 文字のサブスティテューションや、その拡張である自由度 n の自由群上の automorphism を道具として、力学系の視点からとらえようとするを研究課題とした。これに対して、non-Pisot hyperbolic automorphism を用いて、複素 Pisot 数系という概念を導入することに成功し、その数系の上で、純周期的展開をもつ数の代数的特徴づけに成功した。また、5 次 unimodular reducible サブスティテューションから、リーマン面上の準周期タイリングが生成可能であることを示すことに成功した。

研究成果の概要（英文）：We have obtained the following results which concern to analyze the structure of constructing the quasi-periodic tilings by using the substitution or automorphism on the free group with degree n from the viewpoint of the dynamical systems. In particular, we find the class of the non-Pisot hyperbolic automorphism called *complex Pisot numeration systems* and discuss the algebraic properties of the purely periodic points of the systems. Moreover, we show how to construct the quasi-periodic tiling of the Riemann surface by using the unimodular reducible substitution with degree 5.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2007 年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2008 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2009 年度	1,600,000	480,000	2,080,000
年度			
総計	7,200,000	2,160,000	9,360,000

研究分野：数論とエルゴード理論

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：準周期タイリング, Pisot / non-Pisot 数, サブスティテューション, フラクタル, Diophantine 近似

1. 研究開始当初の背景

3 文字のサブスティテューション $\sigma: 1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 13, 3 \rightarrow 1$ から生成される、境界がフラクタルな領域の発見とその領域上の力学系（マ

ルコフ性をもつ力学系）の登場（[Rauzy 1982]）は、準結晶（準周期タイリング）の理論との関連ともあいまって、力学系・エルゴード理論の分野において、強いインパクトの

ある話題となった。この“Rauzy フラクタル”とも呼ばれる領域の存在は、その後、unimodular, primitive, Pisot, n 文字のサブスティテューション、という条件を満たすクラスにおいて構成可能であることが、Arnoux-伊藤[Arnoux-伊藤 2001]により証明され、研究の方向は、その一般化へと一挙に多様化・活性化することとなった。このような時代背景の下で、当該研究は次の課題を研究の目的とした。

[Rauzy 1982] G. Rauzy, *Nombres Algébriques et Substitutions*, Bull. Soc. Math. France, **110** (1982), 147 -- 178.

[Arnoux-伊藤 2001] P. Arnoux, S. Ito, *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Bull. Belg. Math. Soc. **8** (2001), 181 -- 207.

2. 研究の目的

諸分野にみられる準結晶（準周期タイリング）の仕組みを、サブスティテューションや自由群上の automorphism という道具を武器とし、主に力学系の視点からとらえ、解析を試みた。具体的な研究目的としては、

(1) unimodular Pisot サブスティテューションから導かれる準周期タイリングの構成とその解析、という研究をより深化させる、

(2) unimodular non-Pisot サブスティテューションから導かれる準周期タイリングの構成とその解析、という新分野の研究を行う、

(3) 自由群上の automorphism から導かれる準周期タイリングの構成とその解析も視野に入れる、

を行うとともに、これらの応用として、

(4) 離散力学系解析への応用、

(5) numeration system の諸性質、特に周期点の特徴づけ、

(6) Diophantine 近似論への応用、

(7) Low discrepancy 列解析への応用、

を目指した。

3. 研究の方法

我々の研究方法の第1の特色は、フラクタル図形やそれによるタイリングをテーマとすることもあって、数学系研究では珍しく、コンピューターシミュレーションによる「実験」を多用するところにある。そして、これらのデータの背後にある数理の理論化を行ってきた。第2の特色は、我々の研究チームはフランスの P. Arnoux (IML, Université de la Méditerranée), V. Berthé (LIRMM, Université de Montpellier) を中心とする研究チーム、中国の Z. Y. Wen (Tsinghua

University), H. Rao (Huazhong Normal University) などを中心とするフラクタル解析のチーム、アメリカにおける M. Barge (Montana State University), E. A. Robinson (The George Washington University) などの力学系研究者のチームとかなり密接な共同研究の体制を組み、交流を積み上げてきていることがあげられる。

4. 研究成果

先に挙げた研究目的に沿って、どのような成果を得ることができたかについて述べる。

(1) unimodular Pisot サブスティテューションから導かれる準周期タイリングについて。

Pisot サブスティテューションから決まる固有多項式が既約な場合については、前出の[Arnoux-伊藤 2001]また[伊藤-Rao 2004]によって、ほとんど完成形に近い結果が得られているが、可約の場合については、タイリング理論の姿がまだ完成にはほど遠い状態である。そんな中、(ある例の上だけではあるが)タイリングを乗せる空間を2次元リーマン面とすることで、可約性の特徴をとらえることに成功した。([榎本-江居-古門-伊藤 2007])。

[伊藤-Rao 2004] S. Ito, H. Rao, *Purely periodic β -expansions with Pisot unit base*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2004), 953 -- 964.

[榎本-江居-古門-伊藤 2007] *Tilings of a Riemann surface and cubic Pisot numbers*, Hiroshima Math. J. **37** (2007), 181 -- 210.

(2) unimodular non-Pisot サブスティテューションから導かれる準周期タイリングについて。

non-Pisot サブスティテューションが hyperbolic のとき、新しい結果を得ることができた。それは、サブスティテューションから決まるタイリング構成法が、“A*条件”と呼ばれる条件（これはタイルの裏向きを制御するために考察したもの）を満たすときには、hyperbolic な平面上に準周期タイリングを生成できることを主張したものである([古門-伊藤-Robinson 2006])

[古門-伊藤-Robinson 2006] M. Furukado, S. Ito, E. A. Robinson, *Tilings associated with non-Pisot matrices*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **56** (2006), 2391 - 2435.

(3) 自由群上の automorphism から導かれる準周期タイリング

hyperbolic Pisot サブスティテューションから作成するタイリング法を拡張し、hyperbolic non-Pisot automorphism という

枠組みでタイリング構成法の議論をしたほうがよい, と説いたのが, [Arnoux-古門-Harris-伊藤, preprint]であった. これらの研究結果を受けて, 応用面でもいくつかの結果が得られた.

[Arnoux-古門-Harris-伊藤] *Algebraic numbers and automorphisms of free groups*, preprint.

(5)と関連して, 4次 hyperbolic non-Pisot 型の automorphism のあるクラスで, フラクタル領域をもつ力学系が構成できるが, その力学系の周期点の代数的特徴づけに成功した ([浜-伊藤 2009]).

[浜-伊藤 2009] *Purely periodic points of complex Pisot expansions*, Tokyo J. Math. **32** (2009), 517 -- 636.

(6)に関連して, 「Modified Jacobi-Perron algorithm からつくられる主近似分数が, よい同時近似を与えるかどうか」という問いに対し, 「主近似のみならず, 中間近似を取り込むことによって, よい近似を与える」という定理をタイリング理論の応用として証明することができた ([伊藤-安富 2007]), など, 多くの応用研究の成果も得られた. 今後もこの分野に山積する諸課題, 例えば, Low discrepancy 列とタイリングの関係, 4-区間変換から生成されるサブステューションとタイリングなどについて, 明らかにしたい.

[伊藤-安富] *On simultaneous Diophantine approximation to periodic points related to modified Jacobi-Perron algorithm*, (Probability and Number Theory – Kanazawa 2005) Advanced Studies in Pure Mathematics **49** (2007), 171 -- 184.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

1. M. Hama, M. Furukado, S. Ito, *Complex pisot numeration systems*, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli, 58 (2009), 9-49, 査読有
2. K. Nakazawa, K. Ishimura, S. Ito, *Negative slope algorithm and multiplicative Rauzy induction of 3-interval exchange transformations*, Hiroshima Mathematical Journal, 39 (2009), 451-468, 査読有
3. Y. Ichikawa, S. Ito, *Three interval*

exchange transformation and its odometer representation, Tokyo J. Math. **32** (2009), 447-469, 査読有

4. M. Hama, S. Ito, *Purely periodic points of complex Pisot expansions*, Tokyo J. Math. **32** (2009), 517-636, 査読有
5. M. Furukado, H. Rao, S. Ito, *Geometric realizations of hyperbolic unimodular substitutions*, Progress in Probability, 61 (2009), 251-268, 査読有
6. T. Sadahiro, S. Ito, *Beta-Expansions with Negative Basis*, Integers (2009), 239-259, 査読有
7. K. Ishimura, S. Ito, *Characterization of periodic points of the negative slope algorithm*, Osaka Journal of Mathematics, 45 (2008), 941-963, 査読有
8. V. Berthé, H. Ei, H. Rao, and S. Ito, *On Substitution Invariant Sturmian Words: An Application of Rauzy Fractals*, Theoretical informatics and applications, 41 (2007), 329-349, 査読有
9. F. Enomoto, H. Ei, M. Furukado, S. Ito, *Tilings of a Riemann surface and cubic Pisot numbers*, Hiroshima Mathematical Journal, 37 (2007), 181-210, 査読有
10. S. Ito, S. Yasutomi, *On simultaneous Diophantine approximation to periodic points related to modified Jacobi-Perron algorithm*, Advanced Studies in Pure Mathematics, 49 (2007), 171-184, 査読有

[学会発表] (計 15 件)

1. 伊藤俊次, *On substitutions related to the Rauzy induction on 4-interval exchange transformations II*, Workshop 「数論とエルゴード理論」 2010年3月7日 金沢大学サテライト・プラザ (石川県)
2. 伊藤俊次, *Substitutions from Rauzy Induction on 4-interval exchange transformations and Quasi-periodic tilings*, International Workshop on Dynamics and Fractals, 2009年12月27日, Morningside center of Institute of Mathematics, Academy of Science of China, Beijing, P.R. (中国)
3. 伊藤俊次, *Substitutions from Rauzy induction on 4-interval exchange transformations and quasi-periodic tilings*, 研究集会「エルゴード理論の

- 最近の話題」2009年11月9日 日本大学理学部（東京都）
4. 伊藤俊次, *Substitutions from Rauzy Induction on 4-interval exchange transformations and Quasi-periodic tilings*, Workshop on substitutions and tilings, 2009年9月17日, FRUMAM (Fédération de Recherche des Unités de Mathématiques de Marseille) (フランス)
 5. 伊藤俊次, *Quasi-periodic tilings from Pisot substitutions*, RIMS 共同研究「準周期タイルと言語理論の周辺」2009年6月9日, 京都大学数理解析研究所 (京都府)
 6. 伊藤俊次, *Quasi-periodic tilings from Pisot substitutions*, The 5th Asian International Workshop on Quasicrystals (AIWQ5), 2009年6月3日, 東京理科大神楽坂キャンパス (東京都)
 7. 伊藤俊次, *Complex Pisot Numeration system*, Numeration: Mathematics and Computer Science, 2009年3月24日, CIRM, Marseille (フランス)
 8. 伊藤俊次, *Quasi-periodic tilings from non-Pisot unimodular matrices*, Mini-Workshop: The Pisot Conjecture - From Substitution Dynamical Systems to Rauzy Fractals and Meyer Sets, 2009年3月3日, Oberwolfach (ドイツ)
 9. 伊藤俊次, *"Boundary" dynamical systems*, Workshop "Number Theory and Ergodic Theory 2009 January" 2009年1月31日, 金沢大学サテライト・プラザ (石川県)
 10. 伊藤俊次, *Tilings generated by non-Pisot group automorphisms and Domain exchange transformations*, Combinatorial and Computational aspects of Tilings, 2008年7月30日, The Mathematics Department of Imperial College London (イギリス)
 11. 伊藤俊次, *Complex Pisot numeration systems and self-similar tilings*, エルゴード理論とその応用, 2007年12月19日, 慶應大学日吉キャンパス (神奈川県)
 12. 伊藤俊次, *Complex Pisot Numeration Systems*, 準周期構造のスペクトル解析と関連する話題, 2007年11月19日, 京都大学数理解析研究所 (京都府)
 13. 伊藤俊次, *Complex Pisot Numeration Systems*, Workshop on Fractal Geometry and Ergodic Theory, 2007年11月4日, Morningside Center, Academy of Science, Beijing (中国)
 14. 伊藤俊次, *Complex Pisot Numeration Systems*, Workshop "Number Theory and Ergodic Theory 2007", 2007年9月29日, 金沢大学サテライト・プラザ (石川県)
 15. 伊藤俊次, *Tilings by non-Pisot matrices, Generalized substitutions, tilings and numeration*, 2007年6月11日, Centre IGESA, Porquerolles (フランス)
- [その他]
ホームページ等
<http://www.shunjiito.com/>
6. 研究組織
 - (1) 研究代表者
伊藤 俊次 (ITO SHUNJI)
金沢大学・自然科学研究科・特任研究員
研究者番号: 30055321
 - (2) 研究分担者
藤崎 礼志 (FUJISAKI HIROSHI)
金沢大学・電子情報系・講師
研究者番号: 80304757

安富 真一 (YASUTOMI SHIN'ICHI)
鈴鹿工業高等専門学校・教養教育科・教授
研究者番号: 60230231
 - (3) 連携研究者
小川 重義 (OGAWA SHIGEYOSHI)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号: 80101137
(H18→H19: 研究分担者)

秋山 茂樹 (AKIYAMA SHIGEKI)
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号: 60212445
(H18→H19: 研究分担者)

田村 純一 (TAMURA JUN'ICHI)
津田塾大学・付置研究所・研究員
研究者番号: 90418905
(H18→H19: 研究分担者)