

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2006～2009

課題番号：18340028

研究課題名（和文） 非可換統計学における量子情報幾何学的方法

研究課題名（英文） Quantum information geometrical methods in noncommutative statistics

研究代表者

藤原 彰夫 (FUJIWARA AKIO)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30251359

研究成果の概要（和文）：非可換統計学における量子情報幾何学的方法の確立をめざし、以下の研究成果をあげた。1) 適応的量子推定問題における強一致性および漸近有効性の証明。2) $SU(D)$ の漸近的推定理論の確立とその微分幾何構造の研究。3) ランダムネス基準の α ダイバージェンスに基づく新たな定式化。4) 量子通信路多様体上のファイバー束の理論とその応用。5) 統計力学における情報幾何学的方法の研究。

研究成果の概要（英文）：Aiming at establishing quantum information geometrical methods in noncommutative statistics, we have obtained the following results: 1) Strong consistency and asymptotic efficiency for adaptive quantum estimation problems. 2) Geometry of optimal estimation scheme for $SU(D)$ channels. 3) Randomness criteria in terms of α -divergences. 4) A fibre bundle over manifolds of quantum channels and its application to quantum statistics. 5) Information geometry of Ising spin chains.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2007年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2008年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2009年度	2,400,000	720,000	3,120,000
年度			
総計	10,400,000	3,120,000	13,520,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：情報幾何学，非可換統計学

1. 研究開始当初の背景

情報幾何学は、確率分布族の有する自然な微分幾何構造の研究から始まり、1980年代前半に基本的枠組みが提唱された比較的新しい研究対象である。研究代表者はこれまで、情報幾何構造の量子確率空間への拡張を押し進めるとともに、量子推定理論や量子情報

理論の諸問題への応用にも取り組んできた。しかし古典統計学の場合と異なり、非可換統計学全般に通用する幾何学的方法の構築には至っていなかった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、空来の断片的成果を統合・

発展させ、「非可換統計学における量子情報幾何学的方法」とでも呼ぶべき一般的方法論の確立をめざすとともに、非可換統計学の諸問題に応用していくことにある。

3. 研究の方法

研究代表者、研究分担者、連携研究者、および共同研究者の間で、当該研究課題に対する問題意識や方法論、さらにはこれまでの研究成果を互いに共有し、緊密な協力体制を維持しつつ、個々のアイデアを尊重し、純理論的な研究を行った。

4. 研究成果

(1) 量子推定問題でしばしば仮定される推定量の局所不偏性は、一般には真の（そして未知の）量子状態に陽に依存するため、局所不偏推定量に基づく推定理論は理論的にも実験的にも全く無意味である、という批判がなされてきた。本研究では、一見すると回避不能な上記難点が、適応的推定というスキームを援用することにより解決できることを、凸解析およびマーチンゲール理論を用いて証明した。これは、量子推定理論が提唱されて以来、ずっと未解決となっていた量子 Cramer-Rao 不等式の操作的意味づけに体する一つの回答を与える画期的研究成果である。

(2) 上記研究成果 (1) で確立した量子 Cramer-Rao 不等式の操作的意味づけに基づき、未知の $SU(D)$ を統計的に推定する問題を研究した。ここでは許容的推定量という概念を新たに導入すると共に、群の表現論的手法を駆使して、最適推定方式の下での量子 Fisher 計量が、各既約表現の Casimir 作用素と（定数倍を除いて）一致することを明らかにし、これをもとに状態空間への $SU(D)$ の最適埋め込み方法の量子情報幾何学を論じた。

(3) 「ランダムとは何か」という問いかけは、「情報とは何か」という問いかけとも関連する深遠な問題であり、古典・量子を問わず、確率的挙動を示すシステムの幾何構造を考える上で本質的な問題である。本研究では、ユニバーサル仮説検定的手法を用いて Martin-Loef ランダムネスの研究を行い、2つの測度に関して同時にランダムとなる系列を、 $|\alpha| < 1$ を満たす α -ダイバージェンスで特徴づけることに成功した。

(4) 量子通信路の作用素和表現の任意性は、これまで単なる表現の冗長性として認識されていた。これに対し本研究では、量子通信路多様体を底空間とし、作用素和表現の自由度をファイバー空間とするファイバーバン

ドル構造を導入することにより、量子通信路の最適推定方式がファイバーバンドルの接続構造と密接な関係にあることを明らかにした。そしてこの描像を駆使し、これまで未解決であった量子 Fisher 情報量の拡大次数依存性が、殆どすべての通信路において $O(n)$ なる漸近特性を有することを明らかにした。

(5) 統計力学では、分配関数を計算する際にしばしば近似を行う。例えばクラスター近似法では、全系をより小さなサイズの独立同分布クラスターに分解し、各クラスターは全系の Hamiltonian の構造を真似て作った実効的 Hamiltonian で特徴づけられるとする。そして境界のパラメータ値は自己無撞着方程式から定める。しかしながら純粋に数学的観点からは、より多体/長距離相互作用を有する実効的 Hamiltonian を使った方が、確率分布の近似という意味では良い近似が得られるのではないかという問題が生じる。本研究ではこの問題を情報幾何学的に研究し、高い対称性を持つ系では、従来のクラスター近似法のアイデア（の一部）が正当化できることを示した。さらに、相転移の問題が一般仮説検定の枠組みで論じられる可能性のあることも同時に指摘した。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計12件）

① Akio Fujiwara and Shigeru Shuto, “Hereditary structure in Hamiltonians: Information geometry of Ising spin chains,” *Physics Letters A*, vol.374, pp. 911-914 (2010). 【査読あり】

② Toshiki Mabuchi, “An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds, II,” *Osaka Journal of Mathematics*, col. 46, pp. 115-139 (2009). 【査読あり】

③ Akio Fujiwara and Hiroshi Imai, “A fibre bundle over manifolds of quantum channels and its application to quantum statistics,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol.41, 255304 (2008). 【査読あり】

④ Akio Fujiwara, “Randomness criteria in terms of α -divergences,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.54, pp.1252-1261 (2008). 【査読あり】

⑤ Yapage Nihal and Hiroshi Nagaoka, “Information geometrical approach to mean-field approximation for quantum Ising spin models,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 41, 065005 (2008). 【査読あり】

⑥ Toshiki Mabuchi, “Asymptotic structures in the geometry of stability and structural metrics,” *Handbook of geometric analysis*, no. 1, pp. 277-300, *Advanced Lectures in Mathematics*, vol. 7, Int. Press, Somerville, MA (2008). 【査読あり】

⑦ Toshiki Mabuchi, “Chow-stability and Hilbert stability in Mumford’s geometric invariant theory,” *Osaka Journal of Mathematics*, vol. 45, pp. 833-846 (2008). 【査読あり】

⑧ Hiroshi Imai and Akio Fujiwara, “Geometry of optimal estimation scheme for SU(D) channels,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol.40, pp.4391-4400 (2007). 【査読あり】

⑨ Hiroshi Nagaoka and Masahito Hayashi, “An information-spectrum approach to classical and quantum hypothesis testing for simple hypotheses,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 53, pp. 534-549 (2007). 【査読あり】

⑩ Tomohiro Ogawa and Hiroshi Nagaoka, “Making good codes for classical-quantum channel coding via quantum hypothesis testing,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 53, pp. 2261-2266 (2007). 【査読あり】

⑪ Akio Fujiwara, “Strong consistency and asymptotic efficiency for adaptive quantum estimation problems,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 39, pp. 12489-12504 (2006). 【査読あり】

⑫ Toshiki Mabuchi, “Extremal metrics and stabilities on polarized manifolds,” *Proc. International Congress of Mathematicians*, vol. 2, pp. 813-816, *European Math. Soc. Zurich* (2006). 【査読あり】

[学会発表] (計 9 件)

① Akio Fujiwara, “A fibre bundle over manifolds of quantum channels and its application to quantum

statistics,” *Aharonov Bohm Effect and Berry Phase Anniversary 50/25 2009*, H. H. Wills Physics Laboratory, University of Bristol, 14-15 December 2009.

② Akio Fujiwara, “Hereditary property of Ising spin systems,” *Information geometry and decision geometry*, Institute of Statistical Mathematics, 24 March 2009.

③ Akio Fujiwara, “Information geometrical methods in quantum statistics,” *The 10th RIES-Hokudai International Symposium on Aya*, Hokkaido University, 8 December 2008.

④ 長岡浩司「情報スペクトルを通してみた確率・情報・エントロピー」電子情報通信学会ソサイエティ大会 (基礎・境界ソサイエティ), 鳥取大学, 2008年9月18日.

⑤ Akio Fujiwara, “Fibre bundle over manifolds of quantum channels and its application to quantum statistics,” *BSI Forum – Mini Symposium on Information Geometry*, RIKEN, 29 May 2008.

⑥ Hiroshi Imai and Akio Fujiwara, “Fibre bundle over manifolds of quantum channels and its application to quantum statistics,” *GSIS & DEX-SMI Workshop on Quantum Statistical Inference and Entanglement*, Tohoku University, 12 February 2008.

⑦ 長岡浩司「統計力学と量子情報の数理」日本物理学会2007年春期大会, 鹿児島大学, 2007年3月21日.

⑧ Hiroshi Nagaoka, “On quantum extension of information geometry,” *International Workshop on Affine Differential Geometry and Information Geometry*, Sichuan Union University, China, 3 September 2006.

⑨ Toshiki Mabuchi, “Extremal metrics and stabilities on polarized manifolds,” *International Congress of Mathematicians*, ICM 2006, Madrid, 29 August 2006.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~fujiwara>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤原 彰夫 (FUJIWARA AKIO)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30251359

(2) 研究分担者

長岡 浩司 (NAGAOKA HIROSHI)
電気通信大学・
大学院情報システム学研究科・教授
研究者番号：80192235

満洲 俊樹 (MABUCHI TOSHIKI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80116102
平成20年度，21年度は連携研究者

杉田 洋 (SUGITA HIROSHI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50192125
平成20年度，21年度は連携研究者

今野 一宏 (KONNO KAZUHIRO)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10186869
平成20年度，21年度は連携研究者

渡部 隆夫 (WATANABE TAKAO)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30201198
平成20年度，21年度は連携研究者

山崎 洋平 (YAMAZAKI YOUHEI)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：00093477
平成20年度，21年度は連携研究者

杉本 充 (SUGIMITO MITSURU)
名古屋大学・
大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：60196756
平成20年度，21年度は連携研究者