

平成 22 年 4 月 30 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2006 ～ 2009

課題番号：18340033

研究課題名 (和文) ディリクレ形式と対称マルコフ過程の確率解析

研究課題名 (英文) Dirichlet Forms and Stochastic Analysis of Symmetric Markov Processes

研究代表者

竹田 雅好 (TAKEDA MASAYOSHI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30179650

研究成果の概要 (和文)：

ディリクレ形式論は  $L^2$  理論であり、マルコフ過程論は分布を扱うという意味で本来  $L^1$  理論である。このギャップを埋めることにより、マルコフ過程の諸性質が成立するための必要十分条件を  $L^2$  の量、特に生成作用素のスペクトル下限の言葉で与えられるのではないかとの思いがあった。そして、これまでの研究で、対称マルコフ過程に対する Donsker-Varadhan 型の大偏差原理を用いることでマルコフ半群のスペクトル半径が  $L^p$  に依らないことを示し、ファイマン・カツ汎関数の可積分性、シュレディンガー作用素の熱核のガウス評価の安定性に関する必要十分条件をえた。

研究成果の概要 (英文)：

The theory of Dirichlet forms is an  $L^2$ -theory, while the theory of Markov processes is, in a sense, an  $L^1$ -theory. To bridge this gap, we study the  $L^p$ -independence of growth bounds of Markov semigroups, more generally, of generalized Feynman-Kac (Schroedinger) semigroups. A key idea for the proof of the  $L^p$ -independence is to employ arguments in the Donsker-Varadhan large deviation theory. The  $L^p$ -independence enables us to control  $L^\infty$ -properties of the symmetric Markov process; in fact, we can state, in terms of the bottom of  $L^2$ -spectrum, a necessary and sufficient conditions for the integrability of Feynman-Kac functionals and for the stability of Gaussian both side estimates of Schroedinger heat kernels.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	2,200,000	660,000	2,860,000
2007年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2008年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2009年度	2,300,000	690,000	2,990,000
年度			
総計	8,800,000	2,640,000	11,440,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：基礎解析

キーワード：ディリクレ形式、マルコフ過程、大偏差原理

## 1. 研究開始当初の背景

ディリクレ形式なる概念は 1959 年ボイリング・ドゥニによって導入された。その後、福島正俊によって対応するマルコフ過程の構成に成功し、ディリクレ形式の確率論的解釈が行われ、ディリクレ形式の解析的な側面とマルコフ過程の確率論的側面の自由な使い分けが可能になった。しかし、ディリクレ形式論は  $L^2$  理論であり、マルコフ過程論は分布を扱うという意味で本来  $L^1$  理論である。このギャップを埋めることにより、マルコフ過程の諸性質が成立するための必要十分条件を  $L^2$  の量、特に生成作用素のスペクトル下限の言葉で与えられるのではないかとの思いがあった。マルコフ半群についての  $L^p$  独立性についてはこれまでの研究で十分条件を得ていたため、それをファイマン・カツ半群にまで拡張し、加法汎関数の大偏差原理の証明に応用できないか考えていた。

ディリクレ形式から構成されるマルコフ過程は一般にはセミマルチンゲールとはならないため、伊藤解析の拡張となる確率解析を展開する必要がある。福島は今日、福島分解と呼ばれている分解公式を得たが、有界変動ではない部分の解析は非常に難しい。そのため、Lyons と Zheng はマルコフ過程の対称性を加味した新たな分解公式を提案した。そこで、本研究のもう一つのテーマとして、Lyons と Zheng の公式の非対称な場合への拡張と応用を視野に入れて研究を始めていた。

## 2. 研究の目的

マルコフ半群に関する  $L^p$  独立性をファイマン・カツ半群に拡張することにより、ゲルトナー・エリスによる大偏差原理証明の前提である対数モーメント母関数の存在を

広い範囲の加法汎関数に対して証明する。特に、ジャンプを持つ加法汎関数に対する大偏差原理についての結果を得る。そのためには、ファイマン・カツ汎関数のウエイトを持ったマルコフ過程に対してドンスカー・バラダーン型大偏差原理を拡張することが必要である。さらにそのためには、レート関数である I-function の拡張とシュレディンガー形式との対応関係をつけることが必要になる。以上のことを踏まえ、従来の不変測度からの大偏差ではなく、基底 (ground state) からの大偏差として、新たな滞在型の大偏差原理を、対称マルコフ過程に対して構築することが目的である。そして、それを加法汎関数の大偏差原理に応用することが第二の目的である。

## 3. 研究の方法

ファイマン・カツ汎関数のウエイトを持ったマルコフ過程に対してドンスカー・バラダーン型大偏差原理の証明には、ウエイトを加味したレート関数の導入が欠かせないが、これまで研究してきたゲージ関数を用いて定義することを考えた。また、指導学生であった土田兼治、田原宏喜は、加法関数の大偏差原理、ファイマン・カツ半群のスペクトル半径の  $L^p$  独立性に関する情報収集を行い、その旅費として本研究費を使った。土田とはジャンプ型加法汎関数の大偏差原理について、田原とはファイマン・カツ半群に関する  $L^p$  独立性に関する共著論文を書いた。

## 4. 研究成果

グリーン緊密性を満たすポテンシャルを持つシュレディンガー半群を  $L^p$  空間で考え

たとき、その増大度が  $p$  に依らないための必要十分条件を与えた。その過程で、ファインマン-カツ汎関数のウェイトを持ったマルコフ過程に対してドンスカー・バラダアン型大偏差原理を拡張することができた。また、拡張された I-function の拡張とシュレディンガー形式との同定にも成功し、ウェイトを持ったマルコフ過程を正規化することにより、バラダアンの定式化の意味での大偏差原理を満たすことが分かった。ただし、従来の不変測度からの大偏差として捉えるのではなく、基底からの大偏差として捉えられることが分かった。応用として、対数モーメント母関数の存在と飛躍型加法汎関数の大偏差原理を示し、従来全く研究されていなかったテーマの発掘と十分な成果が挙げられた。特に、加法汎関数の大偏差原理証明のために構築したジャンプ型シュレディンガー作用素の臨界性理論が、最近 M. Yor たちによって活発に研究されている処罰問題へ応用できることが分かったことは予想外の進展であった。研究代表者によるものだけでも、9編の発表済み論文、1編の印刷中論文、2編の投稿中論文として実を結んだ。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

1. M. Takeda, Large deviations for discontinuous additive functionals of symmetric stable processes, to appear in Math. Nachr. 査読有
2. M. Takeda, Feynman-Kac penalisations of symmetric stable processes, Electron. Comm. Probab. 15 (2010), 32-43 査読有
3. M. Takeda, A formula on scattering length of positive smooth measures, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 1491-1494 査読有
4. M. Takeda, Y. Tawara,  $L^p$ -independence of spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups, Forum Math. 21(2009), 1067-1080 査読有
5. K. Hattori, T. Hattori, Equation of

motion for incompressible mixed fluid drivend by evaporation and its application to online rankings, Funkcialaj Ekvacioj. 52 (2009), 301-319 査読有

6. K. Hattori, T. Hattori, Existence of an infinite particle limit of stochastic ranking process, Stochastic Processes and their Applications, 119 (2009), 966-978 査読有

7. M. Takeda, Large deviations for additive functionals of symmetric stable processes, J. Theoret. Probab. 21 (2008) 336-355. 査読有

8. T. Mikami, M. Thieullen, Optimal transportation problem by stochastic optimal control, SIAM J. Control Optim. 47 (2008) 1127-1139. 査読有

9. K. Kuwae, Maximum principles for subharmonic functions via local semi-Dirichlet forms. Canad. J. Math. 60 (2008) 822-874. 査読有

10. Z. Q. Chen, P. F. itzsimmons, K. Kuwae, T. S. Zhang, Stochastic calculus for symmetric Markov processes. Ann. Probab. 36 (2008) 931--970. 査読有

11. Z. Q. Chen, P. F. itzsimmons, K. Kuwae, T. S. Zhang Perturbation of symmetric Markov processes. Probab. Theory Related Fields 140 (2008) 239--275. 査読有

12. M. Takeda, Gaussian bounds of heat kernels of Schrodinger operators on Riemannian manifolds, Bull. London Math. Soc. 39 (2007) 85-94. 査読有

13. M. Takeda, K. Tsuchida, Differentiability of spectral functions for symmetric  $\alpha$ -stable processes, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007) 4031-4054. 査読有

14. M. Takeda, Branching Brownian motions on Riemannian manifolds: Expectation of the number of branches hitting closed

sets, Potential Analysis 27 (2007) 61-72.

査読有

15. M. Takeda,  $L^p$ -independence of spectral bounds of Schroedinger type semigroup, J. Funct. Anal. 252 (2007) 550-565. 査読有

16. M. Takeda, Some topics connected with gaugeability for Feynman-Kac functionals, Kokyuroku Bessatsu B6 (2007) 221-236. 査読有

17. T. Hattori, The fixed point of a generalization of the renormalization group maps for self-avoiding paths on gaskets, J. of Statistical Physics 127 (2007) 609-627. 査読有

18. M. Takeda, Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric  $\alpha$ -stable processes, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006) 2719-2728. 査読有

19. T. Hattori, H. Ochiai, Scaling limit of successive approximations for  $w' = -w^2$ , Funkcialaj Ekvacioj 49 (2006) 291-319. 査読有

20. T. Mikami, M. Thiullen, Duality theorem for the stochastic optimal control problem, Stochastic Process. Appl. 116 (2006) 1815-1835. 査読有

[学会発表] (計 18 件)

1. 竹田雅好, A formula on scattering length of positive smooth measures, Stochastic Analysis of Jump Processes and Related Topics, 2009年7月8日 数理解析研究所, .

2. 竹田雅好,  $L^p$ -independence of spectral bounds of Feynman-Kac semigroups, 33rd Conference on Stochastic Processes and Their Applications, 2009年7月27日, ベルリン, ドイツ.

3. 竹田雅好,  $L^p$ -independence of

spectral bounds of Schroedinger semigroups, 2nd International Conference on

Stochastic Analysis and Its Applications, 2008年5月28日, Seoul National University, ソウル, 韓国.

4. 竹田雅好, A large deviation principle for symmetric Markov processes with Feynman-Kac functional, Stochastic Analysis and Applications, 2008年9月8日, 西新プラザ, 福岡市, 日本.

5. 服部哲弥, Amazon.co.jp のランキングを記述する偏微分方程式, 数理解析セミナー, 2008年5月22日, 大阪大学.

6. 桑江一洋, On doubly Feller property, 確率論シンポジウム, 2008年12月19日, 東京大.

7. 桑江一洋, On general perturbations of symmetric Markov processes, 確率論シンポジウム, 2008年12月19日, 東京大.

8. 服部哲弥, Amazon.co.jp のランキングを記述する偏微分方程式, 日本数学会2007年度年会応用数学分科会, 2008年3月26日, 近畿大学

9. 服部哲弥, Stochastic ranking process の査読無限粒子極限と Amazon.co.jp のランキング, 数理ファイナンスとその周辺, 2008年1月24日, 東京大学.

10. 服部哲弥, Stochastic ranking process の流体力学極限と 2ch.net, 確率論シンポジウム, 2007年12月11日, 熊本大学.

11. 服部哲弥, 蒸発を動因とする流体の運動のオンラインデータの分析への応用, 数理学談話会, 2007年11月29日, 金沢大学

12. 服部哲弥, Amazon.co.jp のランキングを記述する偏微分方程式, 数理解析セミナー, 2007年11月22日, 首都大学東京

13. 服部哲弥,  $d$ 次元バスケット上の自己回避経路のくりこみ群解析, 日本数学会2007年

度秋季応用数学分科会特別講演, 2007 年 9 月 22 日, 東北大学

14. 三上敏夫, Marginal problem for semimartingales via duality, nternational Conference for the 25<sup>th</sup> Anniversary of Viscosity Solutions, 2007 年 6 月 4 日, 東京大学.

15. 三上敏夫, 双対問題による与えられた周辺分布を持つ確率過程の構成、日本数学会、2007 年 9 月 21 日, 東北大

16. 竹田 雅好, Some topic connected to integrability of Feynman-Kac functionals, ポテンシャル論とその周辺, 2006 年 12 月 18 日, 京都大学.

17. 竹田 雅好, Large deviations for additive functionals of symmetric stable processes, Stochastic Analysis and its Applications, 2006 年 9 月 11 日, 京都大学.

18. 竹田 雅好, Large deviations for additive functionals of symmetric stable processes, 確率論と幾何学, 2006 年 8 月 7 日, ワシントン大学, シアトル, アメリカ合衆国.

[図書] (計 1 件)

1. 福島 正俊, 竹田 雅好, 培風館  
「マルコフ過程」 (2008) 304 頁

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

[その他]  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

竹田 雅好 (TAKEDA MASAYOSHI)  
東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号 : 30179650

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号

### (3) 連携研究者

服部 哲弥 (HATTORI TETSTUYA)  
慶応大学・経済学部・教授

研究者番号 : 1018902

三上 敏夫 (HATTORI TETSTUYA)  
広島大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号 : 70229657

桑江 一洋 (KUWAE KAZUHIRO)  
熊本大学・工学部・教授

研究者番号 : 80243814