

平成 21 年 4 月 26 日現在

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2006-2009

課題番号：18340036

研究課題名（和文）放物型幾何としての複素解析の研究

研究課題名（英文）Study of complex analysis from a point of view of parabolic geometry

研究代表者 平地 健吾（HIRACHI KENGO）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

60218790

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：CR 幾何，共形幾何，セゲー核，ベルグマン核

1. 研究計画の概要

この研究は Fefferman により提案された「放物型不変式論」を中心とした強擬凸領域の解析および幾何の研究プログラムの発展を目指すものである。放物型不変式論は、CR 幾何、共形幾何を含む幾何構造を統一的に理解する視点を与えており、とくに後者では近年 AdS/CFT 対応に関連して完備アインシュタイン計量の漸近挙動と解析の主要な理論となっている。本研究では、CR 幾何と共形幾何を関連づけて考えることにより Fefferman のプログラムの正しい形を模索し、実行に移すことを目標とする。研究は次の 3 つの段階に分かれる：

- (1) 局所 CR/共形不変量および、より弱い不変性を持った Q-曲率などを構成し
- (2) それらと核関数および完備アインシュタイン計量の漸近挙動の関係を調べる；
- (3) 核関数、体積積分等のくりこみとして大域的な不変量を構成する。

2. 研究の進捗状況

共形幾何においては偶数次元の共形構造に付随するアンビエント計量の構成に成功した（Robin Graham 氏との共同研究）。この計量

を用いることにより共形構造の曲率のジェットを共形多様体の次元より 2 次元高いランクをもつテンソル空間内の多様体として実現することができる（ジェット同型定理と呼ばれる）。この証明では共形構造の変形複体のアンビエント空間へのリフトを用いるため、テンソルのリフトの一般論についても研究を進めた。ジェット同型定理の応用として、スカラー局所共形不変量の構成を行った。とくに次元が 8 以下の多様体の全ての不変量がアンビエント計量をもちいて具体的に示すことを示した。またテンソルのリフトの応用として、ワイル構造に対して Q-曲率が定義できることを示した。これまでは Q-曲率はレビ・チビタ接続について定義されていたが、これを共形構造を保つ接続（ワイル構造）にまで拡張することは Q-曲率の理解を深めることになる。

CR 幾何においてはセゲー核の漸近展開と Q-曲率の関係を記述するために用いる不変式論を整備した。局所 CR 不変量を記述する不変式論は知られていたがセゲー核のように接触形式の選び方に依存する弱い不変量を扱うには

スケール関数の曲率をアンビエント空間において表示する必要があった。これが田中曲率のトレースフリーリッチ曲率のアンビエント空間へのリフトとして実現できることを示した。またセゲー核に現れる特性類の情報を取り出す為に局所ケーラー不変量の積分として得られるケーラークラスの不変量を考察した。このような不変量はチャーヌ不変量のみであるというのが予想であるが、証明はまだ完成していない。

3. 現在までの達成度

おおむね順調に進展している

共形幾何におけるアンビエント計量の理論を完成できたことは当該分野での大きな貢献であるが、CR幾何の研究に十分な時間をとることができなかった。セゲー核の不変式論も枠組みは分かっているが論文にまとめるには段階には至っていない。

4. 今後の研究の推進方策

偶数次元の共形構造に付随するアンビエント計量の理論を論文として出版するのが、最終年度の大きな目標である。また論文の準備中に発見したワイル構造に対するQ-曲率の変換則および積分不変量についての考察を行う。CR幾何については不変式論の視点だけに限らず、より具体的な例として佐々木多様体（一次元の対称性をもつ強擬凸境界）の場合をケーラー多様体の不変量を用いて研究する。上述の積分不変量に対する予想が正しければセゲー核と特性類の関係式を導くことができる。

5. 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計3件)

(1) K. Hirachi: Ambient metric construction of CR invariant differential operators, in "Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations," The IMA volumes in mathematics and its applications 144, 61--76, Springer 2008.

(2) K. Hirachi: Logarithmic singularity of the Szego kernel and a global invariant of strictly pseudoconvex domains, Ann. of Math. 163 (2006), 499--515.

(3) C.R. Graham and K. Hirachi: Inhomogeneous Ambient Metrics, in "Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations," The IMA volumes in mathematics and its applications 144, 403--420, Springer 2008.

〔学会発表〕(計12件)

(1) Kengo Hirachi: Scalar Invariants for Even Dimensional Conformal Structures, Geometric PDE seminar, Institute for Advanced Study, Princeton (USA), 2009年2月3日.