

平成 22 年 5 月 31 日現在

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2006 ～ 2009

課題番号：18340036

研究課題名（和文） 放物型幾何としての複素解析の研究

研究課題名（英文） Study of complex analysis from a point of view of parabolic geometry

研究代表者

平地 健吾 (HIRACHI KENGO)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：6021890

研究成果の概要（和文）：

本研究では 8 次元以下または次数 2 以下のスカラー共形不変量の完全な構成法を与えた；これは長年の未解決であった偶数次元の共形不変量の決定問題を大きく進展させるものであり CR 不変量の構成への応用も期待できる。構成の基礎となるのは共形構造のジェット空間を既約なテンソル空間に分解するジェット同型定理である；この同型写像はアンビエント計量とよばれるリッチ平坦ローレンツ計量の曲率テンソルで与えられる。また CR 幾何においてはセゲー核を記述する不変式論を定式化した。

研究成果の概要（英文）：

We have given a complete construction of scalar conformal invariants of dimension less than 9 or degree less than 3; this was a unsolved problem for even dimensions and is expected to have application to the construction of CR invariants. This result is a consequence of the jet isomorphism theorem that gives a decomposition of the jet space of conformal structures as irreducible tensor spaces; the isomorphism is defined via the curvature of the ambient metric, a Ricci-flat Lorentz metric associated to conformal structure. On CR geometry, we have formulated an invariant theory that can be applied to describe the Szego kernel.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	2,100,000	630,000	2,730,000
2007 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2008 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2009 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
総計	7,200,000	2,160,000	9,360,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：CR 幾何，共形幾何，セゲー核，アインシュタイン計量

1. 研究開始当初の背景

1979 年に Fefferman は強擬凸領域の解析お

よび幾何の研究プログラム「放物型不変式論」を提唱した。その基本となるのは熱核、

再生核などの漸近挙動にあらわれる幾何的な不変量を通して幾何と解析を結びつける手法である；ベルグマン核およびセゲー核などの再生核をリーマン多様体上の熱核の類似とみなし指数定理などの発見を目標としている。しかし未だに大域的な不変量については未知の部分が多い。一方、この漸近解析の手法は理論物理学での AdS/CFT 対応の観点から完備アインシュタイン多様体の漸近解析として再認識され、共形幾何においても応用されてきている。

2. 研究の目的

強擬凸領域の幾何(CR 幾何)と共形幾何を関連づけて考えることにより Fefferman のプログラムの正しい形を模索し、実行に移すことを目標とする。研究は次の3つの段階に分かれる：

- (1)局所 CR/共形不変量および、より弱い不変性を持った Q-曲率などを構成し
- (2)それらと核関数および完備アインシュタイン計量の漸近挙動の関係を調べる。
- (3)核関数,体積積分等のくりこみとして大域的な不変量を構成する。

3. 研究の方法

(1) Fefferman および Graham のアイディアにしたがって共形構造および CR 構造に付随するアンビエント空間の構成から着手する。 n 次元共形多様体に付随するアンビエント空間とは、計量束を拡張することにより構成される $n+2$ 次元のリッチ平坦なローレンツ多様体であり、共形不変量はすべてアンビエント空間の不変量に対応すると予想されている。 n が奇数のときには完成した理論があるが、 n が偶数あるいは CR 多様体の場合には不変量の対応は不完全である。この困難をアンビエント空間の精密化により克服する。

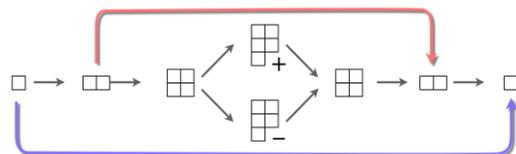
(2) セゲー核の対数項 ψ の不変式論における特徴付けから研究を始める。 ψ は接触形式 θ

の局所不変量であるが CR 不変量ではない；これは共形幾何および CR 幾何で定義される Q-曲率と類似している。 ψ と Q-曲率を不変式論を用いて比較することにより、その性質を明らかにする。

(3) セゲー核の対数項 ψ および Q-曲率の CR 多様体上での積分は大域的 CR 不変量であることが知られている。また CR 多様体が擬アインシュタイン構造をもてば Q-曲率の積分は消えることが知られている。これらの事実と手がかりにして、擬アインシュタイン構造と積分不変量の関係を不変微分作用素を用いて研究する。

4. 研究成果

(1) Robin Graham 教授（ワシントン州立大学）との共同研究により偶数次元の共形構造に付随するアンビエント計量の族を構成した。先行する理論ではアインシュタイン方程式の解の任意性が障害となっていたが、この構成法では任意性を記述するパラメータ空間を導入しアンビエント計量の族を与えることにより障害を回避した。この族を用いればアンビエント計量の曲率と共形構造の曲率の対応を与える、ジェット同型定理がえられる。ここで同型写像は共形構造の変形複体のアンビエント空間へのリフトを構成することにより自然に与えられる。例えば6次元空間での変形複体は次のようなヤング図形の対称性をもつテンソル空間の系列である：



これまでは最初の3つの空間（順にベクトル場、計量テンソル、曲率テンソルに対応する）のみが用いられてきた。本研究で構成したリフトでは全てのテンソル空間の解析とその

間の不変微分作用素を用いる。とくに色のついた長い矢印が偶数次元空間にのみ現れる作用素であり、偶数次元共形構造の本質を捉えた結果であると思われる。

この変形複体を用いた同型写像の構成方法はすでに知られていた奇数次元でのジェット同型定理の完結な別証明も与えている。また変形複体は放物型部分群に対応するバーンスタイン・ゲルファント・ゲルファント複体への一般化が可能であり、より広い枠組みでの放物型幾何への応用も期待できる。

さらにジェット同型定理と放物型不変式論を用いることにより全てのスカラー共形不変量はアンビエント計量の曲率の完全縮約として表示できることを示した。このような完全縮約はアンビエント計量に加えたパラメータを含むため共形不変量を与えとは限らない。そこでパラメータへの依存性を詳しく調べることにより次元 n が 8 以下あるいは次数が 2 以下の共形不変量を全て決定した。とくに次数が 2 の共形不変量は与えられたウェイトごとにただ一つ (1 次元) 存在するという明快な定理が得られた。

CR 不変量の構成はアンビエント計量を通してみると、共形不変量との類似性が高い。上述のパラメータへの依存性の解析は CR 不変量の構成への応用も可能であると期待できる。

(2)セゲー核の漸近展開および CR 幾何における Q -曲率を記述するために用いる不変式論を整備した。局所 CR 不変量を記述する不変式論は知られていたがセゲー核のように接触形式の選び方に依存する弱い不変量を扱うことはできなかった(CR 不変量はすべての接触構造のスケーリングに関して不変性をもつが、セゲー核は CR 多重調和関数によるスケーリングに関してのみ不変性をもつ)。この弱い不変性をもつ不変量はウェブスタ

ー・田中接続のリッチ曲率のトレース・フリー部分を用いて構成可能であることを示し、さらにこの構成がこのカテゴリーの全ての不変量を与えることを示した。この結果の応用としてセゲー核の対数的特異性が(一般化された) Q -曲率と CR 不変量の和として表されることを示した。

(3)セゲー核の漸近展開の係数の積分として定義される大域的な不変量を偏極ケーラー多様体上の負の直線束のなかの柱状領域の場合に詳しく考察した。この設定では積分不変量はリーマン・ロッホの定理によりチャーレン(類の積分で得られる)不変量を用いて記述される。とくにケーラー類にのみ依存する不変量である。そこでケーラー類にのみ依存する積分不変量(曲率の多項式の積分で与えられる数)はチャーレン不変量のみであるという予想を立てた。アレカキス氏(トロント大学)との共同研究で、被積分関数が曲率の微分を含まない場合には予想が正しいことを証明した;一般の場合の解決を目指し引き続き共同研究を進めている。この予想が証明できればセゲー核とチャーレン多項式の具体的な関係式が得られる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

(1) Kengo Hirachi: Logarithmic singularity of the Szego kernel and a global invariant of strictly pseudoconvex domains, Ann. of Math. 163 (2006), 499--515. 査読あり

(2) Kengo Hirachi: Ambient metric construction of CR invariant differential operators, in "Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations," The IMA volumes in mathematics and its applications 144, 61--76, Springer 2008. 査読あり

(3) C. Robin Graham and Kengo Hirachi:

Inhomogeneous Ambient Metrics, in
"Symmetries and Overdetermined Systems
of Partial Differential Equations,"
The IMA volumes in mathematics and its
applications 144, 403--420, Springer 2008.
査読あり

[学会発表] (計 15 件)

(1) Kengo Hirachi:

Scalar Invariants for Even Dimensional
Conformal Structures, Geometric PDE
seminar, Institute for Advanced Study,
Princeton (USA), 2009 年 2 月 3 日.

(2) Kengo Hirachi: Fefferman-Graham's
ambient metric and scalar invariants of
conformal structures
PDE Seminar, MIT (USA) 2009 年 3 月 18 日

(3) Kengo Hirachi: Integral Kähler
invariants and the singularity of the
Szegő kernel, Programme for the d-bar
Neumann problem, ESI (Austria) 2009 年 12
月 15 日

(4) Kengo Hirachi: Ambient realization of
the conformal deformation complex,
Conformal Geometry: invariant theory and
the variational method, Roscoff (France),
2008 年 7 月 13 日.

(5) Kengo Hirachi: Jet isomorphism theorem
in conformal geometry, Asymptotic
structures in geometric analysis,
Stanford Univ. (USA) 2007 年 3 月 17 日.

(6) Kengo Hirachi: Q-curvature in CR
geometry, Midwest Geometry Conference,
University of Iowa (USA), 2007 年 5 月 19
日.

(7) Kengo Hirachi: The ambient metric to
all orders in even dimensions, 8th Pacific
Rim Geometry Conference, South Durras
(Australia), 2006 年 12 月 13 日.

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

平地健吾 (HIRACHI KENGO)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 6021890

(2) 研究分担者

小松 玄 (KOMATSU GEN) 大阪大学大学院理学
研究科・准教授
研究者番号: 60108446
(H19→H20: 連携研究者)

高山 茂晴 (TAKAYAMA SHIGEHARU)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 20284333
(H19→H20: 連携研究者)

(3) 研究協力者

ロビン グラハム (Robin Graham)
ワシントン州立大学・数学科・教授