

平成 22 年 6 月 3 日現在

研究種目： 基盤研究 (B)
 研究期間： 2006 年度～2009 年度
 課題番号： 18340037
 研究課題名 (和文) 非リーマン幾何構造の変換群による大域解析と無限次元表現における分岐則の理論
 研究課題名 (英文) Transformation groups for geometric structures, global geometric analysis, and theory of branching laws of infinite dimensional representations
 研究代表者
 小林 俊行 (KOBAYASHI TOSHIYUKI)
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授
 研究者番号： 80201490

研究成果の概要 (和文)：表現の分岐則は、空間の対称性の破れを記述する数学理論である。

本研究では、無限次元表現の分岐則の理論を指導原理の一つとし、幾何構造の対称性を用いた大域解析の基礎理論を推進した。特に、擬リーマン空間形における共形反転変換に対応し、二次錐上のフーリエ変換という概念を導入し、D型単純リー群の極小表現のシュレーディンガーモデルの理論を確立した。また、複素多様体における可視的作用という独自のアイデアを用いて「無重複表現」の基礎理論を推進した。

研究成果の概要 (英文)：Minimal representations are building blocks of unitary representations. During this period, we established the *Schrodinger model* of minimal representations of the indefinite orthogonal group, and determined a closed formula of the *unitary inversion operator* on the L^2 -model on the isotropic cones, that generalizes the Euclidean Fourier transform. A new deformation theory was introduced in [1]. Further, I made systematic and synthetic applications of the original theory of *visible actions* on complex manifolds to multiplicity-free theorems, in particular, branching problems to symmetric pairs.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	4,800,000	1,440,000	6,240,000
2007 年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2008 年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2009 年度	2,700,000	810,000	3,510,000
年度			
総計	13,800,000	4,140,000	17,940,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： ユニタリ表現，リー群，極小表現，無重複表現，不連続群，分岐則，冪零軌道，可視的作用

1. 研究開始当初の背景

(1) ユニタリ表現論においては、表現の**誘導**と**制限**の解明という2つの大きなテーマがある。1次元表現からの「誘導」は等質空間上の大域解析と等価であり、半世紀以上にわたって Gelfand, Harish-Chandra, Oshima等により大きく発展してきた。一方、「誘導」に較べて「制限」の理論は、テータ対応など特殊な事例を除き、研究は困難であり未開拓のままであった。

研究代表者は1990年代に、ユニタリ表現の「制限」に関する種々の“悪い”現象を調べ、逆に、“良い振舞いをする”クラスが意外にも豊富にあることを発見し、「離散的分岐則の理論」を構築した (Invent. Math. 1994, Ann. Math. 1998, Invent. Math. 1998, ICM2002)。その後「離散的分岐則」の理論は、表現の構造を調べる手法として、また、非対称等質空間上の L^2 解析やモジュラー多様体の研究など表現論以外の分野でも応用が芽生えていた。

(2) リー群の表現の中で、もっとも根源的と考えられている表現の一つが、単純リー群の極小表現である。極小表現は「最小の」無限次元表現である。Weil 表現はC型の単純群の極小表現であり、古くから知られていた。一般の単純リー群の極小表現に対しては、1990年代よりアメリカを中心に多くの代数的研究がなされていた。一方、擬リーマン計量の共形変換に着目することにより、Kobayashi-Orsted (Advances in Math. 2003) において極小表現の新しい幾何的構成法が証明された。

(3) von Neumann 環の理論により、任意のユニタリ表現は最小単位のもの(既約表現)に分解できることが知られている。この分解において同一の既約表現が高々一度しか現れない表現を**無重複表現**という。

無重複表現は、数十年以上にわたって、組合せ論、代数幾何、dual pair 対応などさまざまな手法を用いることによって多くの事例が発見されている。

当該研究代表者は萌芽的研究(2004-2006)において、無重複表現を生み出す新しい幾何的条件として「複素多様体における可視的作用」という独自のアイデアを提起し、その基礎研究を開始していた。

以上が、本研究において特に関係の深い事柄に関しての研究開始当初の背景である。

2. 研究の目的

以下の2つのテーマ

- (1) 無限次元表現の理論、特に、非コンパクト部分群に関する分岐則の理論
- (2) 幾何構造をもちいた大域解析

を車の両輪のようにして、大域解析と表現論の基礎理論を発展・深化させようという長期構想の中で、当該研究期間においては

- ① D型の単純群の極小表現の Schrodinger モデルの L^2 解析
- ② 複素多様体における可視的作用という独自のアイデアによる無重複表現の統一的な理解
- ③ 無重複の分岐則に基づいた大域解析

に関する基礎理論を推進し、その論証を行うことを主要な目的とする。

3. 研究の方法

群から見ると「小さな」無限次元表現は、それが実現される空間からみると「大きな対称性」をもつ。この哲学に基づき、

(1) 通常では意識されないような「隠れた対称性」を大域解析の中に見出すこと

および

(2) 「対称性の破れ」を記述する、無限次元表現の分岐則の理論を援用すること

により、無限次元表現の代数的構造が関数空間の対称性および対称性の破れ（関数等式、微分方程式、積分公式 etc）に反映されているような大域解析の舞台を発見する。

特に、半単純リー群の無限次元表現論、離散的な分岐則の理論、超局所解析、特殊関数などが具体的な手法として重要になる。

さらに、大域解析において有用な展開定理の背後には、「無重複表現」という代数構造がしばしば潜んでいる。そこで、この無重複表現を系統的に得るために

(3) 複素多様体における可視的作用の理論を新しい幾何的方法として用いる。

4. 研究成果

(1) (極小表現の大域解析) D 型の非コンパクト単純リー群である $O(p, q)$ の極小表現の L^2 モデルの解析的研究を行った。この表現を理解するための鍵になるのは、共形幾何における反転に対応するユニタリ作用素

を具体的に決定することである（古典的な Weil 表現においては、このユニタリ作用素はフーリエ変換の定数倍になる）。表現論的考察により、D 型の単純リー群の極小表現においては、このユニタリ反転作用素は二次錐上の L^2 空間におけるフーリエ変換の役割を果たす。そこで、この作用素の具体的な形を求めることが重要になる。

群が共形変換群 $O(n, 2)$ の場合は、このユニタリ反転作用素はさらに複素解析的半群に拡張することができ、その核を具体的に決定した。これは古典的な Mehler 核の一般化を与える。上記の結果とその証明は長編の論文として Howe 教授の還暦研究記念の特別号で発表した（論文[8]）。さらに、一般の不定値直交群 $O(p, q)$ に対しても、ユニタリ反転作用素の核関数を完全に決定し、それをもとに極小表現のシュレーガーモデルの基礎理論を確立した。その特殊関数論への応用も含めた一連の成果はアメリカ数学会の *Memoirs* の一冊として出版予定である。さらにこれらの研究に加えて、Ben Said 教授と Orsted 教授との共同で Dunkl 変換を含む変形理論を開始した（速報は論文[2]で公表）。

(2) (対称対に関する分岐則の研究) 研究代表者が導入した「複素多様体における可視的作用」という概念を用いて、(有限次元・無限次元の両方の場合に) 無重複表現となるための統一的な条件の研究を押し進めた（論文[6, 7]）。

(3) (無重複表現を用いた実解析)

無重複表現という代数構造は大域解析の理論構築において重要な指針となる。

このアイデアを追求し、一見、無限次元表現論とは無関係に見える大域解析の問題に対して以下の2つの応用を与えた。

①有理形関数を3つの球面の直積上で積分した公式を与える Bernstein-Reznikov 積分の高次元化 (Clerc 教授, Pevzner 教授, Orsted 教授との共同研究, 論文[1])

②シンプレクティック群の無限次元表現の無重複分岐則の理論を援用することによって古典的な実解析における Weyl calculus を高次元化し、その積の明示公式を決定した (Unterberger 教授等との共同, 論文[3])。

(4) 実調和解析における古典的な積分作用素である Riesz 変換などの対称性に着目し、逆に対称性の高い積分作用素をすべて捕捉する代数的枠組みを定式化した。

その上で、この枠組みから生まれたある新しい作用素に対し、 L^p 有界性や二次超曲面上の大域解析との関係を明らかにした

(A. Nilsson 博士との共同研究, 論文[4, 5])。

(5) 研究代表者が在籍している京都大学数理解析研究所(—2007. 3)および東京大学(2007. 4—)において “Lie Group and Representation Seminar” を定期的に主催し、リー群論や表現論、不連続群論等に関する最先端の研究の成果について近郊の専門家が交流する場を設けた。

また、ドイツの Oberwolfach 研究所(2007)およびゲッティンゲン大学(2009)において国際研究集会を海外研究協力者と共催し、最新の研究成果に関する情報交換を行った。さらに 2006 年秋には当該研究代表者が中心となって『高木レクチャー』を創始し、関係諸機関と協力して現在までに 7 回の高木レクチャーを開催し、各回にそのブックレットを出版している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

[1] T. Kobayashi, J.-L. Clerc, B. Orsted, M. Pevzner, Generalized Bernstein-Reznikov integrals, *Mathematische Annalen* (published on line first) 37pp., arXiv:0906.2874 [math.CA].

(査読有)

[2] T. Kobayashi, S. Ben Said, and B. Orsted, Generalized Fourier transforms $F_{\{k, a\}}$, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 347 (2009), 1119–1124 (published online first, on 21 August 2009). (査読有)

[3] T. Kobayashi, B. Orsted, M. Pevzner, and A. Unterberger, Composition formulas in the Weyl calculus, *J. Funct. Anal.* 257 (2009), 948–991. (査読有)

[4] T. Kobayashi and A. Nilsson, Indefinite higher Riesz transforms, *Arkiv for Matematik* 47 (2009), 331–344. (査読有)

[5] T. Kobayashi and A. Nilsson, Group invariance and L^p -bounded operators, *Math. Z.* 260 (2008), 335–354. (査読有)

[6] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transformation Groups* 12 (2007), 671–694. (査読有)

[7] T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, *Representation Theory and Automorphic Forms*, *Progr. Math.*, vol. 255, Birkhauser, 2007, pp.45–109. (査読有)

[8] T. Kobayashi and G. Mano, The inversion formula and holomorphic extension of the minimal representation of the conformal group, *Harmonic Analysis, Group Representations, Automorphic Forms and Invariant Theory: In Honour of Roger E. Howe*, Singapore University Press and World Scientific Publishing, 2007, pp. 159–223. (査読有)

他 6 件.

[学会発表] (計 51 件)

T. Kobayashi, Branching Problems for Zuckerman’s Derived Functor Modules. *Representation Theory and Mathematical*

Physics: (Gregg Zuckerman 教授還曆記念研究集会) Yale University, USA, 24---27 October 2009.

T. Kobayashi, Geometric Analysis on Minimal Representations. Representation Theory of Real Reductive Groups (organized by Jeffrey Adams, Susana Salamanca, John Stembridge, Peter Trapa and David Vogan). University of Utah, Salt Lake City, USA, 27-31 July 2009.

T. Kobayashi, Conformal Geometry and Schrodinger Model of Minimal Representations, (2 lectures), Representation Theory XI. Dubrovnik, Croatia, 14-21 June 2009.

T. Kobayashi, Conformal Geometry, Schrodinger Model of Minimal Representations, and Deformation of Fourier Transforms 83eme Rencontre entre physiciens theoriciens et mathematiciens (Encounter between theoretical physicists and mathematicians). Institut de Recherche Mathematique Avancee, Strasbourg, France, 11-13 June 2009.

T. Kobayashi, Discontinuous Groups on pseudo-Riemannian Spaces. Mathematische Arbeitstagung 2009. Max-Planck Institut fur Mathematik, Bonn, Germany, 5-11 June 2009.

T. Kobayashi, Conformal Geometry and Schrodinger Model of Minimal Representations. (opening lecture). (B. Ørsted 教授還曆記念研究集会) Representations, Lie groups, and Conformal Geometry. Gottingen, Germany, 6-10 April 2009.

T. Kobayashi, Global Geometry and Analysis on Locally Symmetric Spaces - Beyond the Riemannian case. colloquium. Yale University, USA, 25 March 2009.

T. Kobayashi, Global Geometry on Locally Symmetric Spaces - beyond the Riemannian case. Representations of Lie groups and applications. Institut Henri Poincare, Paris, France, 15-18 December 2008.

T. Kobayashi, Global Geometry of Locally Symmetric Spaces - beyond the Riemannian case. The Monna Lectures. Utrecht University, the Netherlands, 11 December

2008.

T. Kobayashi, Holomorphic semigroups for minimal representations of conformal groups. Harmonic Analysis, Operator Algebras and Representation Theory (organized by J. Ludwig and A. To-Ming Lau). CIRM, Luminy, France, 3-7 November 2008.

T. Kobayashi, Visible Actions and Multiplicity-free Representations. (4 lectures), Functional Analysis X: Representation Theory (organized by D. Adamovic, D. Bakic, D. Butkovic, H. Kraljevic, G. Muic, M. Primc, M. Rao, D. Renard, H. Sikic and D. Vogan). Dubrovnik, Croatia, 30 June-5 July 2008.

T. Kobayashi, Visible Action, Polar Action and Coisotropic Action. (Jean-Louis Clerc 教授退官記念研究集会) "Hermitian Symmetric Spaces, Jordan Algebras and Related Problems" (organized by W. Bertram and K. Koufany). Centre International de Recherches Mathematiques (CIRM), Luminy, France, 23-27 June 2008.

T. Kobayashi, Restriction of Unitary Representations of Real Reductive Groups. Locally Symmetric Spaces (organized by S. Kudla, J. Rohlf, L. Saper and B. Speh). Banff International Research Station, Canada, 18-23 May 2008.

T. Kobayashi, Existence Problem of Compact Locally Symmetric Spaces. colloquium. Louisiana State University, Baton Rouge, USA, 27 March 2008.

T. Kobayashi, Existence Problem of Compact Locally Symmetric Spaces. colloquium. Harvard University, USA, 17 March 2008.

T. Kobayashi, Branchings to Symmetric Pairs and Analysis on Symmetric Spaces. International Conference on Integral Geometry, Harmonic Analysis and Representation theory (Sigurdur Helgason 教授 80 歳記念研究集会). Reykjavik, Iceland, 15-18 August 2007.

T. Kobayashi, On Locally Symmetric Spaces. (closing lecture), Representation Theory, Complex Analysis and Integral Geometry (organized by Simon Gindikin and Bernhard Krotz). Max-Planck Institut fur Mathematik, Bonn, Germany, 25-27 July

2007.

T. Kobayashi, Multiplicities in the Decomposition of Unitary Representations of Reductive Lie Groups. (opening lecture), Lie Groups, Algebraic Groups and Transformation Groups: (Ernest B. Vinberg 教授 70 歳記念研究集会), (organized by H. Abels, V. Chernousov, G. Margulis, D. Poguntke, and K. Tent). Universitat Bielefeld, Germany, 20–24 July 2007.

T. Kobayashi, The unitary inversion operator on the L^2 model of a minimal representation. Journee-GAG. Poitiers, France, 25 June 2007.

T. Kobayashi, Existence Problem of Compact Locally Symmetric Spaces. Journees Solstice dete 2007: Theorie de Lie, Geometrie et Representations (organized by B. Keller, B. Klingler, R. Rentschler and O. Schiffmann). Institut de Mathematiques de Jussieu, Paris, France, 21–23 June 2007.

T. Kobayashi, Branching Problems of Unitary Representations. (2 lectures), Sackler Distinguished Lectures in Pure Mathematics. Tel Aviv University, Israel, 7, 9 May 2007.

T. Kobayashi, Multiplicity-free Representations and Visible Actions on Complex Manifolds. Analysis Seminar. University of Aarhus, Denmark, 18 September 2006.

T. Kobayashi, Visible Actions on Complex Manifolds. Workshop on Representation Theory and Prehomogeneous Vector Spaces (organized by Y. Hironaka, I. Muller, H. Ochiai, H. Rubenthaler, F. Sato). Institut de Recherche Mathematique Avancee (IRMA), Strasbourg, France, 11–14 September 2006.

T. Kobayashi, Clifford-Klein Forms of Non-Riemannian Homogeneous Spaces. (4 lectures), International Conference and Instructional Workshop: Geometry Topology, Analysis of Locally Symmetric Spaces and Discrete Groups (organized by S-T. Yau (chair), L. Ji, K. Liu, N. Xi H. Xu, L. Yang, Z-J Zheng and X. Zhou). Beijing, Republic of China, 17 July–4 August 2006.

T. Kobayashi, Unitary Representations,

Restrictions and their Applications. (8 lectures), Summer School: Microlocal and Geometric Methods in Representation Theory. Gunzburg, Germany, 17–28 July 2006.

T. Kobayashi, Compact Clifford-Klein Forms of Non-Riemannian Symmetric Spaces. Mini-Workshop on Lie groups, Algebraic Groups and Transformation Groups (organized by H. Abels and E. Vinberg). Universitat Bielefeld, Germany, 15–16 July 2006.

T. Kobayashi, Branching Problems of Unitary representations. “Perspectives in Representation Theory” Strategic Workshop and Round Table Discussion (organized by S. Koenig, H. Krause, P. Littelmann, and G. Malle). Physikzentrum Bad Honnef, Germany, 7–9 July 2006.

T. Kobayashi, Is the Universe Closed? – Existence Problem of Compact Clifford-Klein Forms of Symmetric Spaces. colloquium. Universitat Paderborn, Germany, 4 July 2006.

他 23 件.

[図書] (計 7 件)

T. Kobayashi, and G. Mano, The Schrodinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p,q)$, *Memoirs of American Mathematical Society* (accepted for publication), *アメリカ数学会*, 171 pp., arXiv:0712.1769 [math.RT]

T. Kobayashi, W. Schmid, and J.-H. Yang (eds.), *Representation theory and automorphic forms*, *Progr. Math.*, vol. 255, Birkhauser, 2007, ISBN 0817645055.

他 5 件.

[その他]

ホームページ等

www.ms.u-tokyo.ac.jp/~toshi

において研究成果を紹介している。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小林 俊行 (KOBAYASHI TOSHIYUKI)

研究者番号 : 80201490

(2) 研究分担者

大島 利雄 (OSHIMA TOSHIO)

研究者番号 : 50011721

関口 英子 (SEKIGUCHI HIDEKO)

研究者番号 : 50281134

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :