

平成22年5月24日現在

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2006～2009

課題番号：18340039

研究課題名（和文） 等質錐と等質ジーゲル領域上の幾何学的調和解析

研究課題名（英文） Geometric Harmonic Analysis on Homogeneous Cones and Homogeneous Siegel Domains

研究代表者

野村 隆昭（NOMURA TAKAAKI）

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：30135511

研究成果の概要（和文）：等質錐に付随する基本相対不変式の間次数のギャップと、その等質錐に付随する等質管状領域（第1種ジーゲル領域）の対称性に関する予想があったが、それを否定する等質錐を見いだした。しかもそれが3以上のどの階数においても存在することがわかった。また、双対錐に線型同型であるが、自己双対でない等質錐の例も3以上の任意の階数において発見した。さらに等質錐に付随する基本相対不変式が、対応するクランの複素化の右乗法作用素の行列式の既約因子のすべてであることもわかり、実際対称錐に付随するクランにおいて既約因子への分解を実行した。

研究成果の概要（英文）：There has been a conjecture concerning the gaps between the degrees of the basic relative invariants associated to homogeneous cones and the symmetry of the corresponding homogeneous tube domains (Siegel domains of the first kind). However, we found a homogeneous cone that denies the conjecture. Moreover such a cone is found in any rank greater than or equal to 3. We also discovered a homogeneous cone of arbitrary rank greater than or equal to 3 that is linearly isomorphic to its dual cone. Further, we proved that the basic relative invariants are exactly the irreducible factors of the determinant of the right multiplication operators in the complexification of the clan corresponding to the cone. In the case of symmetric cone, we computed an actual decomposition of that determinant into irreducible factors.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	2,600,000	0	2,600,000
2007年度	2,200,000	660,000	2,860,000
2008年度	2,100,000	630,000	2,730,000
2009年度	1,900,000	570,000	2,470,000
年度			
総計	8,800,000	1,860,000	10,660,000

研究分野：群表現と解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：解析学，関数解析学，関数論，幾何学，ジーゲル領域，等質錐，ジョルダン代数

1. 研究開始当初の背景

可解リー群の表現論・調和解析の研究は、その理論的な重要性にもかかわらず、停滞気味であった。その原因の一つに、可解リー群全体を玉石混淆のまま「一般的に」扱い続けてきているという従前の研究手法があると考え、具体的な対称である等質錐や等質ジゲル領域（それらには分裂可解リー群が単純推移的に作用する）を考えて、リーマン対称空間上の、あるいはエルミート対称空間上の解析学の非対称空間への一般化という視点で研究を遂行することに重点を置くという考えであった。

2. 研究の目的

対称な等質錐や対称なジゲル領域では、それぞれジョルダン代数やジョルダン3項系といった、非結合的代数や（2項演算ではなくて）3項演算が定義された代数系を用いた幾何学や解析学が、1990年前後から積極的に展開され成功を取めてきた。本研究の目的は、非対称領域の場合でも、運動群のリー代数だけではなく、領域の接空間に導入される非結合的代数（Vinbergによるクランや T 代数など）を積極的に用いて解析学を展開することを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 興味深い非対称な等質錐の例をみつける（構成する）。等質錐一般をひとまとめにして取り扱って解析学を展開するには、実験データも少なくまだ時期尚早であると考えられる。第一歩として、対称錐に何らかの意味で近いと考えられる、そしてその意味で興味深い非対称な等質錐を多く見つけて、従前の対称空間上の解析学を一步ずつ、非対称領域へと広げていく。

(2) 等質錐に付随する基本相対不変式の研究。これらは、通常の行列空間上の解析学における首座小行列式の役割を果たすと考えられる。特に非対称な等質錐に付随する基本相対不変式について、一般的なことは何もわかっていないので、(1)での例や低次元（10次元以下）の場合に、等質錐の初等的な実現と共に、片っ端から計算する。

(3) ユークリッド型のジョルダン代数におけるクラン構造の記述。対称錐上の解析学を、非対称な等質錐上の解析学に一般化しようとするときに、これら二つの構造の比較は重要な意味をもつ。

4. 研究成果

(1) 等質管状領域（第1種ジゲル領域）

における基本相対不変式の比によるある不等式系に関して、複素三角群の軌道との関連で研究を実行した。まず、ジゲルの半空間で成立する首座小行列式の比の実部に関する不等式系が、一般の既約対称管状領域で、それに付随するユークリッド型ジョルダン代数での首座小行列式を用いることにより一般化することに成功した。この一般化は、一部の研究者では予想されていたが、証明を与えたのは本研究結果が初めてである。

(2) (1)の結果が対称管状領域を特徴付けるか、すなわち、首座小行列式を基本相対不変式に置き換えて、等質管状領域上で考えるとき、「基本相対不変式の比によるある不等式系が成立する \Leftrightarrow 管状領域が対称」という予想が立てられていたが、その予想を否定する等質錐を、3以上の任意階数において発見した。また10次元以下の既約等質錐で非対称なものは線型同型を除いて123個あるが、その中でたった1個だけがこの予想の主張を否定することも確かめた。

(3) 等質錐に付随するクランの複素化において右乗法作用素の行列式を考えると、その既約成分がちょうど基本相対不変式全部であることを示した。この結果は今後等質錐上の解析学を建設して行くにあたって、大いに役立つものと確信する。

以上(1)～(3)の成果は、連携研究者の伊師英之との共著の学術論文として、論文(13)として出版した（ただし論文出版時には(2)の記述は任意階数ではなく階数は3である。）

(4) (2)の成果を踏まえ、対称錐に近い性質を持つ等質錐の例を見つけ、それを平易な行列の形で実現するという方向にも研究をすすめた。そして、双対錐に線型同型であるが、対称錐でないような既約な等質錐を、3以上の任意階数において発見した。この成果は2008年フランス Luminy で開催された国際研究集会で発表した（学会発表(10)）。そのような例は無いものと信じられていたようで、Gindikin 教授からは「歴史の誤りであった」という評価をいただき、専門家の間では相当のインパクトがあった。成果は論文(3)に発表した。

(5) (3)の成果を踏まえ、対称錐に付随するクランにおいて、実際に右乗法作用素の構造を詳しく調べ、その結果として、右乗法作用素の行列式を計算し、それを既約因子に分解した。2009年4月、ロシアでの研究集会でこの結果を発表した（学会発表(6)）さいに、専門家から、その分解公式の美しさを評価してもらっている。成果はその研究集会の

報告集に発表される予定である（原稿投稿済）。

(6) 若山正人は non-commutative harmonic oscillators のスペクトル・ゼータ関数の正の倍数 (2 以上) 点での特殊値を研究した。その特殊値は極めて興味深い数論的性質を持っていることが判明した。また確率論・統計学の文脈で現れた α 行列式の表現論・不変式論を創始し、展開した。この成果は確率論にもフィードバックしつつあり、また多変数超幾何関数の研究にも用いられ始めている (論文 (8), (10) 等)。

(7) 藤原英徳は intertwining integral の収束性を中心に研究を進め、べき零 Lie 群の単項表現および既約表現の部分群への制限に関する多項式予想にも研究を進め、長年の難問の解決への第 1 歩を踏み出した (論文 (4), (17) 等)。

(8) 梅田亨は不変微分作用素に関する重要な等式である Capelli 型恒等式に対し、個別的な等式だけでなく、その普遍的な成立原理について考察を深めた。それは不変式論と表現論と特殊関数論の三つの分野の相互関連に見いだせる。特に特殊関数については、その非可換性まで含めて考えることにより、従来見えていなかった Capelli 型恒等式の背景が鮮明になるという視点をつかんだ (論文 (11) 等)。

(9) 伊藤稔は、テンソル代数と無限対称群を融合した代数を研究した。この代数において「非可換母関数」を考えることで、immanant という行列関数や一般線型 Lie 環の普遍包絡環の中心の線型基底である量子 immanant を自然な形で見通しよく扱うことができるようになった (論文 (6), (7) 等)。

(10) 伊師英之はジークル領域に関して研究を遂行した。成果として、任意の等質ジークル領域は、推移的な分裂型可解 Lie 群の作用に関して同変に、適当な階数のジークル上半平面の中に埋め込めることを示した。この結果は、それ自身興味深いだけでなく、等質領域の具体例を構成するのにも大変有用である。また甲斐千舟との共同研究では、有界等質領域の代表領域実現が、Richard Penney や本研究課題の代表者である野村によって論じられた等質ジークル領域のケイリー変換に一致することを示した。これは「凸な有界等質領域は対称か」という難問の解決に向けての重要な足がかりになると思われるとともに、多変数複素解析と調和解析が結びついた研究として、研究者の注目を集めた (論文 (2), (5), (19) 等)。

(11) 甲斐千舟は凸錐の因果構造に関する成果を得た、さらに「等質凸錐の因果構造を保つ自己同型は線型なものに限るか」という

問題に取り組み、いくつかの非対称な凸錐の具体例でその検証を行った (論文 (9) 等)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 21 件)

- ① Takaaki Nomura, Focusing on symmetry characterization theorems for homogeneous Siegel domains, Sugaku Expositions, 査読有, 23 (2010), 47-67.
- ② Hideyuki Ishi and Chifune Kai, The representative domain of a homogeneous bounded domain, Kyushu J. Math., 査読有, 64 (2010), 35-47.
- ③ Hideyuki Ishi and Takaaki Nomura, An irreducible homogeneous non-selfdual cone of arbitrary rank linearly isomorphic to the dual cone, Infinite Dimensional Harmonic Analysis, 査読有, IV, 2009, 129-134.
- ④ Ali Baklouti, Hidenori Fujiwara and Jean Ludwig, A variant of the Frobenius reciprocity for restricted representations on nilpotent Lie groups, Infinite Dimensional Harmonic Analysis, 査読有, IV (2009), 13-31.
- ⑤ Hideyuki Ishi, A torus subgroup of the isotropy group of a bounded homogeneous domain, Manuscripta Math., 査読有, 130 (2009) 353-358.
- ⑥ Minoru Itoh, Two permanents in the universal enveloping algebras of the symplectic Lie algebras, Internat. J. Math., 査読有, 20 (2009), 339-368.
- ⑦ Minotou Itoh, Schur type functions associated with polynomial sequences of binomial type, Selecta Math., 査読有, 14 (2009), 247-274.
- ⑧ Kazufumi Kimoto, Sho Matsumoto and Masato Wakayama, Alpha-determinant cyclic modules and Jacobi polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 査読有, 361 (2009), 6447-6473.
- ⑨ Chifune Kai, A characterization of symmetric cones by an order-reversing property of the pseudoinverse maps, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 60 (2008), 1107-1134.
- ⑩ Kazufumi Kimoto and Masato Wakayama, Invariant theory for singular α -determinants, J. Combin. Theory, 査読有, 115 (2008), 1-31.
- ⑪ Toru Umeda, On the proof of the Capelli identities, Funkcial. Ekvac., 査読有, 51 (2008), 1-15.

- ⑫ Hideyuki Ishi and Takaaki Nomura, Irreducible homogeneous non-symmetric cones linearly isomorphic to the dual cones, Contemporary Geometry and Topology and Related Topics, 査読有, Cluj Univ. Press, 2008, 167-171.
- ⑬ Hideyuki Ishi and Takaaki Nomura, Tube domain and an orbit of a complex triangular group. Math. Z., 査読有, 2008, 697-711.
- ⑭ Chifune Kai and Takeo Ohsawa, A note on the Bargman metric of bounded homogeneous domains, Nagoya Math. J., 査読有, 186 (2007), 157-163.
- ⑮ Chifune Kai, A characterization of symmetric Siegel domains by convexity of Cayley transform images, Tohoku Math. J., 査読有, 59 (2007), 101-118.
- ⑯ Minoru Itoh, Two determinants in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras, J. Algebra, 査読有, 314 (2007), 479-506.
- ⑰ Hidenori Fujiwara, Certaines remarques sur l'algebres des operateurs differentiels invariants pour la representation monomiale d'un groupe de Lie nilpotent, Proc. Tunisian Math. Soc., 査読有, 11 (2007), 37-49.
- ⑱ 藤原英徳, 指数型可解リー群のユニタリ表現に関連する調和解析 --- 軌道の方法, 数学, 査読有, 29 (2007), 225-242.
- ⑲ Hideyuki Ishi, On symplectic representations of normal \mathfrak{f} -algebra and their application to Xu's realizations of Siegel domains, Diff. Geom. Appl., 査読有, 24 (2006), 586-612.
- ⑳ Hideyuki Ishi, Wavelet transforms for semidirect product groups with not necessarily commutative normal subgroups, J. Fourier Anal. Appl., 査読有, 12 (2006), 37-52.
- (21) Chifune Kai, Symmetry characterization of quasisymmetric Siegel domains by convexity of Cayley transform images, J. Lie Theory, 査読有, 16 (2006), 47-56.
- [学会発表] (計 22 件)
- ① Toru Umeda, The first fundamental theorem and its applications, Workshop "Invariant Theory and Related Topics", Inha Univ., (Korea), 2010.02.17, 18, 19 (連続講演).
- ② Masato Wakayama, Representation theory for α -determinants, "Representation Theory and Number Theory", National Univ. Singapore, 2010.01.29.
- ③ Chifune Kai, The representative domain of a homogeneous bounded domain, Conference "Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces", Sfax (Tunisia), 2009.11.06.
- ④ Hideyuki Ishi, Equivariant holomorphic line bundles over a bounded homogeneous domain, Conference "Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces", Sfax (Tunisia), 2009.11.04.
- ⑤ Hidenori Fujiwara, Monomial representations with multiplicities of discrete type, Conference "Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces", Sfax (Tunisia), 2009.11.03.
- ⑥ Takaaki Nomura, Right multiplication operators in the clan structure of a Euclidean Jordan algebra, Conference "Harmonic Analysis and Representation Theory of Lie Groups", 2009.04.22, Tambov Univ. (Russia).
- ⑦ Takaaki Nomura, Symmetry characterization theorems for homogeneous convex cones and homogeneous Siegel domains, Conference "Harmonic Analysis and Partial Differential Equations", Marrakech (Morocco), 2009.04.01, 02, 04 (連続講演).
- ⑧ Masato Wakayama, Arithmetics on non-commutative harmonic oscillators, International Workshop "Verified Computations and Related Topics", Univ. Karlsruhe, 2009.03.08.
- ⑨ Hideyuki Ishi, Construction of an invariant inner product on a representation space induced from a non-unitary representation, Conference "Harmonic Analysis, Operator Algebras and Representations", Luminy (France) 2008.11.05.
- ⑩ Takaaki Nomura, Homogeneous convex cones and basic relative invariants, Conferences "Harmonic Analysis, Operator Algebras and Representations", Luminy (France) 2008.11.05, and "Hermitian Symmetric Spaces, Jordan Algebras and Related Topics", Luminy (France), 2008.06.23.
- ⑪ Hidenori Fujiwara, Monomial representations of exponential solvable Lie Groups, Conference "Harmonic Analysis, Operator Algebras and Representations", Luminy (France) 2008.11.04.
- ⑫ Minoru Itoh, Extensions of the tensor algebra and their application to immanants, Workshop "Harmonic Analysis

on Homogeneous Spaces and Quantization”, Tambov Univ., 2008.09.26.

⑬ Chifune Kai, On a condition for a homogeneous bounded domain to be symmetric and a good realization as a bounded domain, Workshop “Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Quantization”, Tambov Univ., 2008.09.24.

⑭ Hideyuki Ishi, Continuous wavelet transform and non-commutative Fourier analysis, Workshop “Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Quantization”, Tambov Univ., 2008.09.23.

⑮ Hideyuki Ishi, Matrix T-algebras and Jordan algebras, Conference “Hermitian Symmetric Spaces, Jordan Algebras and Related Topics”, Luminy (France), 2008.06.23.

⑯ Chifune Kai, A note on the Bergman metric of bounded homogeneous domains, International Workshop “Problems Related to Bergman Kernel”, 中国科学院数学与系统科学研究所, 2008.06.12.

⑰ Takaaki Nomura, Homogeneous Siegel domains --- analysis and geometry, The 3rd PKNU-KU Joint Symposium on Sciences, 釜慶大学 (韓国), 2007.12.01.

⑱ Hideyuki Ishi, Wishart distributions on an open convex cone, JSPS-RFBR Workshop, Tambov Univ. (Russia), 2007.09.27.

⑲ Hideyuki Ishi, Invariant Hilbert spaces of holomorphic functions on a homogeneous Siegel domain, JSPS-RFBR Workshop, Tambov Univ. (Russia), 2007.09.26.

⑳ Takaaki Nomura, Tube domains and basic relative invariants, JSPS-RFBR Workshop, Tambov Univ. (Russia), 2007.09.26, and Workshop “Differential Geometry and its Applications”, Babes Bolyai Univ. (Romania), 2007.08.21.

(21) Takaaki Nomura, Focusing on symmetry characterization theorems for homogeneous Siegel domains, Yaounde Univ. (Cameroon), 2007.09.04-07 (連続講演).

(22) Takaaki Nomura, Cayley transforms of a homogeneous Siegel domains, Seminar “Harmonic Analysis”, Sfax Univ. (Tunisia), 2007.06.06.

[図書] (計2件)

① 若山正人編・著 (剣持勝衛, 梶原健司他共著), 可視化の技術と現代幾何学, 岩波書

店, 2010. 235 頁

② 若山正人編・著 (二宮嘉行, 谷口説男他共著), 技術に生きる現代数学, 岩波書店, 2008. 226 頁

[その他]

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tnomura/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

野村 隆昭 (NOMURA TAKAAKI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 30135511

(2) 研究分担者 (2006, 2007 年度)

若山 正人 (WAKAYAMA MASATO)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 40201149

藤原 英徳 (FUJIWARA HIDENORI)

近畿大学・産業理工学部・教授

研究者番号: 50108643

梅田 亨 (UMEDA TORU)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 00176728

伊藤 稔 (ITOH MINORU)

鹿児島大学・理学部・准教授

研究者番号: 60381141

伊師 英之 (ISHI HIDEYUKI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号: 00326068

(3) 連携研究者 (2008, 2009 年度)

若山 正人 (WAKAYAMA MASATO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号: 40201149

藤原 英徳 (FUJIWARA HIDENORI)

近畿大学・産業理工学部・教授

研究者番号: 50108643

梅田 亨 (UMEDA TORU)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 00176728

伊藤 稔 (ITOH MINORU)

鹿児島大学・理学部・准教授

研究者番号: 60381141

伊師 英之 (ISHI HIDEYUKI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号: 00326068

甲斐 千舟 (KAI CHIFUNE)

金沢大学・大学院自然科学研究科・助教

研究者番号: 70506815