

研究種目：基盤研究（B）
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18340061
 研究課題名（和文）場の理論・弦理論の可解構造

研究課題名（英文）Integrable structure in field theory and string theory

研究代表者

佐々木 隆 (SASAKI RYU)

京都大学・基礎物理学研究所・准教授

研究者番号：20154007

研究成果の概要：

場の理論・弦理論の可解構造を様々な切り口で研究した。厳密なハイゼンベルグ演算子解と生成・消滅演算子を、1および多自由度系で与えた。種々の動力的対称性代数を構成した。q-変形ハイゼンベルグ代数も動力的に導出した。可解性と準可解性の統一理論を与えた。離散量子力学（純虚数および実数シフト）を構成した。これらは、超幾何直交多項式を固有関数として持つ。種々の完全可解な誕生・死滅過程を与えた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	3,400,000	0	3,400,000
2007年度	3,900,000	1,170,000	5,070,000
2008年度	3,700,000	1,110,000	4,810,000
年度			
年度			
総計	11,000,000	2,280,000	13,280,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学、素粒子・原子核・宇宙線・宇宙物理

キーワード：可解系、有限量子系、スピン系、非可換場、ファジーな場、量子重力、幾何構造

1. 研究開始当初の背景

場の理論・弦理論は物質の究極要素である素粒子および量子重力を含めた振る舞いを記述する枠組み・量子論的言語であるが、無限大自由度の量子力学（弦の場合は更により大きな無限大）に伴う種々の困難のために、摂動論的定式化以上には、なかなか満足ゆく結果に到達していなかった。一方で、可解系（解ける場の量子論）の研究は、多くの知られた場の理論・可解モデルなどを具体的に調べることにより、場の理論・弦理論のある部分を、摂動論の枠組みを越えて理解する手段を与えていた。研究開始当初には AdS/CFT 双対性

の理解の進展とともに、高い超対称性を持つ4次元及び高次元のゲージ場理論や、多くのブレーン配位を伴った弦理論の中に、様々な形の可解構造のあることが認識され、可解系が素粒子物理理論の中で果たしうる役割が大きく広がってきた。このことが、この研究を始めた背景にある。

2. 研究の目的

この研究の目的は、大きく2つに分かれる。その1つは、既に同定されている弦理論・場の理論に現れている可解な構造を持つ対象に対して、知られている可解系の方法論を適用して具体的かつ詳細な結果を導くことで

ある。他方は、「可解構造」そのものを深く理解することにより、弦理論・場の理論・量子重力の論理から、厳密に扱える対象を更に広げてゆくことである。

前者に関しては、今までの多体可解系の研究で得られた種々の成果を、弦理論・場の理論に出てくる無限自由度可解系へ適用する。具体的な例の第1としては、弦理論・共形場の理論に現れるピラソロ代数やW代数がある。後者については、多体可解系の知られた方法；Lax表示、保存量の構成、`スピンの自由度の付加`、古典平衡点における力学的自由度の凍結、量子論の完全可解性・準可解性、古典解が明示的に行列の対角化で得られる事実などを、より普遍的な形で表し、対応する無限自由度の弦理論・場の理論の枠組みの中でどのような形をとるかを決定する。特に q -変形理論の物理的意味、あるいは純粋な量子論的解釈を与えることには興味がある。弦理論・量子重力等非常に短距離での物理現象に対して、巨視的な観測が存在しない状況で「古典解」や「古典Lax定式化」等が、どのような物理的意味を持ちうるのかという基本的問題も、具体的な物理系をもとに説明する。

3. 研究の方法

使用する研究施設・設備は、図書館環境と、大量のメモリーを積んで数式処理(Mathematica, Maple, Lie等)を高速にこなすスカラー計算機と、分担者・協力者同士の研究連絡と情報共有を可能にするコンピュータネットワークと、対面しての討論と共同研究するための環境だけである。

計算機に関しては、この課題で遭遇する問題の多くは、定型で大容量・高速処理を必要とする形のものではなく、手探りの思考を援助するものである。稚拙な直感的プログラムでも十分効果を出せるような大メモリーを積み、高速演算チップを載せた卓上計算機を用いた。

基礎物理学研究所は世界に冠たる理論物理の蔵書とほとんどの電子ジャーナルの閲覧設備を誇っている。また、国内国外から専門家を招待し、一定期間滞在してもらい、情報交換、共同研究をするための良い設備を持っている。研究方法としては、国際・国内研究集会を組織したり、参加したり、個別の訪問、招へいなどにより、この分野の多くの専門家達と交流を保ち、新しい潮流・発展を吸収し、深い討論を進めること等が主なものになる。

4. 研究成果

代表者および連携研究者の小竹等との共同研究で得た成果としては：

反ドジッター空間を伝播する弦の挙動を、対応する非線形シグマ模型で記述できる。特殊

な標的空間の場合に、共形対称性が量子論でも保持されることが報告されている。超グラスマン多様体上のシグマ模型の厳密古典解を初等的に構成して見せた。今まで自由場でしか知られていなかった場の理論や量子力学系の厳密解であるハイゼンベルグ演算子解と生成・消滅演算子の具体形を、一体の(連続・離散)量子力学の多くの例で包括的に与えた。揺動現象を記述するフォッカー・プランク方程式の可解な変形を、可解な離散量子力学に基づいて提案した。

更に、可解多粒子量子系の典型例であるカロジェロ系についてハイゼンベルグ演算子解の完全系を、すべてのルート系について与えた。SUSY量子力学の種々の内挿理論の具体形を構成した。離散(準)可解量子力学に対応するフォッカー・プランク方程式を、1および多粒子系について導出した。因子化されたハミルトニアンとその形状不変性・閉性関係式から出発して、離散(準)可解量子力学系の統一理論と、種々の具体形を与え、(q -)アスキー体系の超幾何直交多項式理論を構成した。可解性を特徴付ける動力学対称性代数の種々の具体形を提示した。 q -振動子の具体的演算子形を q -エルミート多項式の離散量子力学から与えた。離散測度を持つ超幾何直交多項式系の統一理論を、ジャコビ行列理論から構成した。

個々の系についての可解・準可解量子力学系の研究；スペクトル・固有関数の決定、形状不変性、ハイゼンベルグ演算子解、生成消滅演算子の構成などを、統一的に第一原理から作り上げた。特に、重要な閉性・双対閉性関係式とアスキー・ウィルソン代数との関係を明らかにした。可解量子力学とフォッカー・プランク方程式の関係を離散化することにより、マルコフ連鎖の典型例である誕生・死滅過程の完全に解ける例18個を離散直交多項式から与えた。1次元量子力学(スツルム・リュウヴィル理論)の基本的定理であるクラムの定理を離散量子力学に拡張した。

連携研究者の成果：

2成分KP方程式の非分散極限から、非分散広田方程式を得た。これは普遍ウィタム階層のハミルトン・ヤコビ方程式の系に同値である。更に、種数0の普遍ウィタム階層と多成分KP階層の非分散極限が同一であることを示した。溶解結晶模型の可積分構造を研究した。その分配関数が1次元戸田階層のタウ関数になることを示し、更に2個の q パラメータを含む場合に拡張した。溶解結晶模型の熱力学的極限から、対応するサイバーク・ウィッテン曲線を導出した(高崎)。

自己双対ヤン・ミルズ・ヒグス場に渦糸や境界壁のある場合の理論の非可解性を、パンルベ性の欠如から示した。また非(反)可換空

問上の可解場の理論の例として超対称複素射影空間シグマ模型のインスタントン方程式を調べた。非(反)可換性がインスタントン方程式を変形しないことを見た。

非(反)可換超空間上の2次元 CP^N 模型の紫外性質を $1/N$ 展開で調べた。非主要項が変形前とは異なることを示した。非(反)可換超空間上の非線形シグマ模型の繰り込み可能性を調べ、インスタントン解を構成した。AdS/CFT 対応とホログラフィに基づき、新しいバリオン模型を提案した(稲見他)。

超弦のコンパクト化に現れるカラビ・ヤウ多様体を共形場で記述する際に出てくる、離散・連続表現を結合して簡単なモジュラー変換性を持つものを得た。 $N=2$ 超重力とヤング・ミルズ場の結合系をその剛性極限の近傍で論じた。一般に新しい質量スケール(プランク質量にゲージ結合定数を掛けたもの)が出現する。これは最近の弱重力予想と合致する。擬似テータ関数の方法を用いて、 $N=4$ の超対称共形代数を一般のレベルで扱い、BPS 表現の指標分解を扱った(江口)。

可換・非結合的なファジー空間の動力学的生成を、テンソル模型に基づき行った。またポアンカレ対称で可換・非結合的時空の中のスカラー場の理論を論じ、1ループの計算でユニタリ性が破れていないことを見た。これは非可換空間の場合と対照的である。ホップ代数構造を持つ場の量子論のいくつかの具体例を論じた。一般相対論のテンソル模型を動力学的ファジー空間の例として、そのガウス古典解の近傍のスペクトルを数値解析した。非可換場の理論における領域壁とホップ代数的並進対称性の関係を論じた。リー代数的非可換空間上の場の理論の性質を、ホップ代数不変性を軸に研究した。ワード・高橋関係式に相当するものを導いた。その自発的対称性の破れに付随するドメイン壁解を調べた。また動的ファジー空間上の理論としてのテンソル模型を調べた(笹倉)。

2次元共形場の理論のくりこみ群の流れを記述する c -定理の4次元超共形場の理論での対応物(a -定理)を幾何学的に定式化した。4次元超共形場理論の R 荷電とカイラル場のスケール次元を決定する a -極大化法の臨界点の存在と一意性を示した。Dixmier 予想「ワイル代数 A_1 の任意の自己準同型は自己同型である」を証明した(加藤)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 34 件)

- (1) T. Nakatsu and K. Takasaki, Melting Crystal, Quantum Torus and Toda Hierarchy, Commun. Math. Phys. **285**

446-468 (2009) 有

- (2) T. Nakatsu, Y. Noma and K. Takasaki, Extended 5d Seiberg-Witten Theory and Melting Crystal, Nucl. Phys. **B808** 411-440 (2009) 有

- (3) T. Nakatsu, Y. Noma and K. Takasaki, Integrable Structure of 5d $N=1$ Supersymmetric Yang-Mills and Melting Crystal, Int. J. Mod. Phys. **A23** 2332-2342 (2008) 有

- (4) C-L. Ho and R. Sasaki, Quasi-exactly solvable Fokker-Planck equations, Annals of Physics, **323** 883-892 (2008) 有

- (5) S. Odake and R. Sasaki, q -oscillator from the q -Hermite polynomial, Phys. Lett. **B663** 141-145 (2008) 有

- (6) S. Odake and R. Sasaki, Orthogonal Polynomials from Hermitian Matrices, J. Math. Phys. **49** 053503 (43 pages) (2008) 有

- (7) S. Odake and R. Sasaki, Exactly solvable 'discrete' quantum mechanics; shape invariance, Heisenberg solutions, annihilation-creation operators and coherent states, Prog. Theor. Phys. **119** 663-700 (2008) 有

- (8) K. Araki, T. Inami, H. Nakajima and Y. Yamashita, $1/N$ Expansion of the 2D CP^{N-1} Model on Non(anti) commutative Superspace, Prog. Theor. Phys. **119** 345-350 (2008) 有

- (9) Y. Sasai AND N. Sasakura, Domain wall solitons and Hopf algebraic translational symmetries in noncommutative field theories, Phys. Rev. **D77** 045033 (8pages) (2008) 有

- (10) N. Sasakura, The Fluctuation spectra around a Gaussian classical solution of a tensor model and the general relativity, Int. J. Mod. Phys. **A33** 693-718 (2008) 有

- (11) R. Sasaki, New quasi exactly solvable difference equation, Int. J. Nonlinear Math. Phys. **15 Suppl. 3** 373-384 (2008) 有

- (12) Naoki Sasakura, Emergent general relativity on fuzzy spaces from tensor models, Prog. Theor. Phys. **119** 1029-1040 (2008) 有

- (13) K. Takasaki and T. Takebe, Loewner equations, Hirota equations and reductions of universal Whitham hierarchy, J. Phys. **A41** 475206 (27 pages) (2008) 有

- (14) Ryu Sasaki, W-L Yang and Y-Z Zhang, Exact classical solutions of non-linear sigma models on super-manifolds, Nucl. Phys. **B 772**, 371-384, (2007) 有
- (15) Kanehisa Takasaki and Takashi Takebe, Universal Whitham hierarchy, dispersionless Hirota equations and multi-component KP hierarchy, Physica **D235** 109-125 (2007) 有
- (16) K. Araki, T. Inami and H. Nakajima, Instanton Equations for the Supersymmetric CP^{N-1} Sigma Model on Non(anti)commutative Superspace, Prog. Theor. Phys. **116** 975-980 (2007) 有
- (17) Doeg-Ki Hong, Takeo Inami and Ho-Ung Yee, Baryons in AdS/QCD, Phys. Lett. **B646** 165-171 (2007) 有
- (18) T. Eguchi, Y. Sugawara and A. Taormina, Liouville Field, Modular Forms and Elliptic Genera, JHEP **0703** 119 (20 pages) (2007) 有
- (19) Y. Sasai and N. Sasakura, Braided quantum field theories and their symmetries, Prog. Theor. Phys. **118** 785-814 (2007) 有
- (20) T. Eguchi and Y. Tachikawa, Rigid Limit in $N=2$ Supergravity and Weak-Gravity Conjecture, JHEP **0708** 068 (17 pages) (2007) 有
- (21) A. Kato, Zonotopes and four-dimensional superconformal field theories, JHEP **0706** 037 (30 pages) (2007) 有
- (22) 加藤 晃史, ヤング図形とゲージ理論, 数理科学 1月号 51-57 (2007) 無
- (23) C-L. Ho and R. Sasaki, Deformed Fokker-Planck Equations, Prog. Theor. Phys., **118** 667-674 (2007) 有
- (24) C-L. Ho and R. Sasaki, Deformed multi-variable Fokker-Planck equations, J. Math. Phys. **48** 073302 (9 pages) (2007) 有
- (25) S. Odake and R. Sasaki, Exact Heisenberg operator solutions for multi-particle quantum mechanics, J. Math. Phys. **48** 082106 (12 pages) (2007) 有
- (26) S. Odake, Y. Pehlivan and R. Sasaki, Interpolation of SUSY quantum mechanics, J. Phys. **A40** 11973-11986 (2007) 有
- (27) R. Sasaki, Quasi Exactly Solvable Difference equations, J. Math. Phys. **48** 122104 (11 pages) (2007) 有
- (28) S. Odake and R. Sasaki, Multi-Particle Quasi Exactly Solvable Difference equations, J. Math. Phys. **48** 122105 (8 pages) (2007) 有
- (29) Satoru Odake and Ryu Sasaki, Exact Solution in the Heisenberg picture and annihilation-creation operators, Phys. Lett. **B641** 112-117 (2006) 有
- (30) Satoru Odake and Ryu Sasaki, Unified theory of annihilation-creation operators for solvable ('discrete') quantum mechanics, J. Math. Phys. **47** 102102 (33 pages) (2006) 有
- (31) Kanehisa Takasaki, Dispersionless Hirota equations of two-component BKP hierarchy, SIGMA **2** 057 (22 pages), (2006) 有
- (32) T. Inami, S. Minakami and M. Nitta, Non-integrability of Self-dual Yang-Mills-Higgs System, Nucl. Phys. **B752** 391-403 (2006) 有
- (33) N. Sasakura, Tensor model and dynamical generation of commutative nonassociative fuzzy spaces, Class. Quant. Grav. **23** 5397-5416 (2006) 有
- (34) Y. Sasai and N. Sasakura, One-loop unitarity of scalar field theories on Poincare invariant commutative nonassociative spacetimes, JHEP 0609 46 (25 pages) (2006) 有
- [学会発表] (計 20 件)
- (1) 小竹悟 佐々木隆, シヌソイダル座標に基づく(準)可解な“離散”量子力学模型, 日本物理学会 2009年3月30日
- (2) Satoru Odake, (Quasi-) exactly solvable 'Discrete' quantum mechanics, Discrete Integrable Systems, 23 March 2009, Newton Inst. Cambridge, UK
- (3) Naoki Sasakura, Emergent general relativity in fuzzy spaces from tensor models, DICE 2008, 24 September 2008, Castiglioncello, Italy
- (4) Kanehisa Takasaki, Dispersionless Hirota equations and reduction of universal Whitham hierarchy, Laplacian Growth and Related Topics, 21 August 2008 CRM, Univ. Montreal, Canada
- (5) Ryu Sasaki, "Exactly solvable Quantum Mechanics and dynamical symmetry algebras," Liouville Gravity and Statistical Models, 23 June 2008, Moscow, Russia
- (6) Tohru Eguchi, $N=2$ Liouville Theory, Liouville Gravity and Statistical Models, 22 June 2008 Lab. Poncelet, Moscow, Russia
- (7) 加藤晃史, Weyl 代数の自己準同型につ

- いて 日本物理学会年会 2008 年 3 月 23 日近畿大学
- (8) 加藤晃史, Weyl 代数の自己準同型について 日本数学会 2008 年 3 月 23 日近畿大学
- (9) 小竹悟, 佐々木隆, 量子力学模型に基づいた q -振動子日本物理学会年会 2008 年 3 月 23 日近畿大学
- (10) 小竹悟, 佐々木隆, Calogero 模型における厳密な Heisenberg 演算子と生成消滅演算子, 日本物理学会秋の分科会 2007 年 9 月 23 日北海道大学
- (11) 稲見武夫, 真継至, 水上史絵, S. Nam, 弦の場の理論における量子補正 —Level Truncation と 1-loop Calculus—日本物理学会第 62 回年次大会, 2007 年 9 月 21 日北海道大学
- (12) 稲見武夫, 真継至, 水上史絵, S. Nam, 弦の場の理論における量子補正 —1-loop 補正—, 日本物理学会第 62 回年次大会 2007 年 9 月 21 日北海道大学
- (13) R. Sasaki, Heisenberg operator solutions for Calogero systems, NEEDS07, 19 June 2007, L' Ametlla de Mar, Spain
- (14) 加藤晃史, Zonotopes and four-dimensional superconformal field theories, 日本数学会 2007 年度年会 (埼玉大学理学部) 2007 年 3 月 29 日
- (15) 加藤晃史, Uniqueness of Black Hole Attractors in Five Dimensional $N=2$ Gauged Supergravity, 日本物理学会 2007 年春季大会 (首都大学東京) 2007 年 3 月 28 日
- (16) Satoru Odake, ``Unified Theory of Annihilation-Creation Operators for Solvable('Discrete')Quantum Mechanics'' Japan Phys. Soc. Pacific Meeting, November 1, 2006, Hawaii, US.
- (17) Akishi Kato, "On concavity of a -functions", Japan Phys. Soc. Pacific Meeting, 30 October 2006, Hawaii, US
- (18) Kanehisa Takasaki, ``Dispersionless Hirota equations of multi-component integrable hierarchies," MISGRAM workshop "Integrable Systems in Applied Mathematics," 12 September 2006, Madrid, Spain
- (19) Ryu Sasaki, ``Exact solutions in the Heisenberg picture and creation-annihilation operators," Exactly solvable systems in quantum field theory, 11 August 2006, Univ. York, UK
- (20) Tohru Eguchi, "Distribution of string vacua in type IIB string theory", Strings2006, 21 June 2006 Beijing,

China

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐々木隆 (SASAKI RYU)

京都大学・基礎物理学研究所・准教授

研究者番号: 20154007

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

高崎金久 (TAKASAKI KANEHISA)

京都大学・人間環境学研究所・教授

研究者番号: 40171433

小竹悟 (ODAKE SATORU)

信州大学・理学部・教授

研究者番号: 40252051

稲見武夫 (INAMI TAKEO)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号: 20012487

江口徹 (EGUCHI TOHRU)

京都大学・基礎物理学研究所・教授

研究者番号: 20151970

笹倉直樹 (SASAKURA NAOKI)

京都大学・基礎物理学研究所・准教授

研究者番号: 80301232

加藤晃史 (KATO AKISHI)

東京大学・数理科学研究科・准教授

研究者番号: 10211848