

平成 21 年 5 月 13 日現在

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2006～2009

課題番号：18360048

研究課題名（和文） 離散凸パラダイムの深化と拡大

研究課題名（英文） Deepening and Expansion of Discrete Convexity Paradigm

研究代表者

室田 一雄（MUROTA KAZUO）

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号：50134466

研究分野：数理工学

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎・工学基礎

キーワード：離散最適化，凸関数，双対性，劣モジュラ関数，マトロイド

## 1. 研究計画の概要

本研究の目的は、経済学、システム工学、オペレーションズ・リサーチ、最適化理論、アルゴリズム理論などの広汎な分野における基礎的諸問題に関わる離散構造を、離散凸性という横断的視点から整理し、「離散凸」という新しいパラダイムを確立し、それを広範囲の応用分野に浸透させることにある。この目的の実現のため、「離散凸パラダイム」の横糸を成す、構造定理やアルゴリズムを代表とする離散関数に関する数理の研究と、縦糸を成す、諸応用分野における具体的な諸問題に対する研究を行った。離散凸解析理論の研究ですでに整備されたM凸関数とL凸関数の概念、共役性、双対性などの理論的コアを、より深めた理論研究と、様々な分野に広げる応用研究の両面から、研究計画を実行した。

## 2. 研究の進捗状況

(1) マトロイドの重要な性質の一般化として、2部グラフのマッチングの抽象化概念であるリンクシステムを用いた変換によって、M凸関数がM凸関数に移されることを示した。

(2) ジャンプシステムと呼ばれる離散システム上の関数に対して、M凸関数の概念を定義し、合成積やネットワーク誘導などの基本演算ができることを示した。さらに、ネットワーク誘導の一般化として、リンクシステムによる変換が定義できることを示した。ジャンプシステム上のM凸関数に対して、局所最適性が大域最適性を保証するという定理を示し、大域最適解を求めるアルゴリズムを示した。

(3) 連続変数と離散変数が混在した関数に対してM凸関数の概念を定義し、局所最適性と大域最適性の関係など、その基本的な性質を明らかにした。

(4) 数理経済学におけるマッチングモデルにおいて、効用関数が離散凹関数である場合に均衡が存在することを示した。これにより、近年海外で提案されたいくつかのモデルが、統一的な枠組に吸収されたことになる。

(5) 制御理論において基本となる行列束の構造を組合せ論的に特徴づけた。

(6) 行集合と列集合を共有するリンクシステムの組を、行列ペンシルの組合せ論的抽象化と捉えて、マトロイドペンシルと定義し、行列ペンシルのKronecker標準形に類似した組合せ的な構造を明らかにした。応用として、リンクシステムの冪乗に関する室田(1990)の定理に簡潔な別証明を与えた。

(7) 離散L凸関数の実用的な高速最小化のために、連続関数から離散関数が定義される実用上一般的なケースに対して、連続緩和を利用した最小化法を導入した。さらに、連続緩和と離散最小解の近接性を証明した。

(8) 多重クラス待ち行列システムの解析で現れる劣モジュラ関数に対して、効率的な最小化アルゴリズムを構築した。

## 3. 現在までの達成度

おおむね順調に進展している。

(理由) 計画時に予定していた成果を順調に得ることができた。「離散凸パラダイム」の基礎を成す離散凸解析の理論を平易に紹介する書籍を発行することもできた。離散凸関数の諸例についても述べ、諸応用分野への

展開を図ることができた。

#### 4. 今後の研究の推進方策

離散凸解析の理論と応用を、「連続・離散軸」, 「凸・非凸軸」, 「分野横断軸」, の3つの観点から整理することによって, 個々の数理的技法や応用諸問題の相互関係を明確にし, 「数理の深化」, 「応用の開拓」, 「ソフトウェアの整備」, の3つの面で新たな展開を図る。(1)「数理の深化」については, 下記の3つのサブテーマに分け, 研究を推進する。

(連続・離散)最適化における連続と離散の関係は双方向であり, 離散の極限として連続を捉えたり, 離散の近似・緩和として連続を用いたりすることができる。構造定理やアルゴリズムを統一する枠組みを目指して, 連続と離散の関係を定量的に示す定理を見出す。

(凸・非凸)実際の応用に現れる関数は凸関数とは限らないが, 連続最適化の分野においては, 凸関数の概念は非凸関数を捉える理論的な軸を成している。離散世界において, 凸関数を軸とする非凸関数の理論を構築する。

(離散凸性)グラフのマッチングの一般化である偶因子やジャンプシステムなどの離散システム上にも離散凸関数が定義できるという事実を踏まえて, 効率的に解ける問題は離散凸性を有するという経験的事実を追究する。

(2)「応用の開拓」については, 下記の2つのサブテーマを対象とする。

(社会工学)オペレーションズ・リサーチ, 数理経済学, ゲーム理論などの社会工学分野での応用を開拓する。ネットワーク構造上の経済学・ゲーム理論(ネットオークションなど)といった現代的課題への応用可能性に重点をおく。

(システム工学)電気回路などを表す微分代数方程式の指数が離散凸性をもつこと, また, 混合行列の階数が離散凸関数によって表現されることを踏まえて, 集中定数系のシミュレーション技術における離散凸性の役割を明らかにする。

(3)「ソフトウェアの整備」を推進する。離散凸解析の理論を説明するデモンストレーション・ソフトウェアと, 個別の応用分野をターゲットとしたアプリケーション・ソフトウェアを開発し, 応用分野の研究者・実務家が離散凸解析の手法を享受できる環境を整備する。

#### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計16件)

S. Fujishige, A. Tamura, A two-sided discrete-concave market with possibly bounded side payments: An approach by discrete convex analysis, Mathematics of Operations Research, 査読有, 32, 2007, 136 - 155

S. Iwata, Combinatorial analysis on singular matrix pencils, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 査読有, 29, 2007, 245-259

Y. Kobayashi, K. Murota, Induction of M-convex Functions by Linking Systems, Discrete Applied Mathematics, 査読有, 155, 2007, 1471-1480

[学会発表](計10件)

S. Moriguchi, N. Tsuchimura, Discrete Convex Functions Minimization Based on Continuous Relaxation, Ninth International Conference Approximation and Optimization in the Caribbean - APPOPT 2008, 2008年3月4日, San Andres Island

[図書](計1件)

室田一雄, 共立出版, 離散凸解析の考えかた---最適化における離散と連続の数理, 2007, 252 ページ