

平成 21 年 6 月 12 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18500217

研究課題名（和文） リスク計量化における多変量極値理論と従属性の研究

研究課題名（英文） Study of multivariate extreme value theory and dependence in quantitative financial risk analysis

研究代表者

塚原 英敦 (TSUKAHARA HIDEATSU)

成城大学・経済学部・教授

研究者番号：10282550

研究成果の概要：金融におけるリスクを定量的に捉えるリスク計測手法の開発は重要な課題である。従来から用いられているバリュエーション・アット・リスクの欠点を解決する、新しい歪みリスク尺度から成る 1 パラメータ族を提案し、それが望ましい性質をもつことを示した。そして、データからその値を推定する統計的・数値的手法や、そのリスク尺度を用いたポートフォリオの最適化や資本配分を検討した。さらに、接合分布関数を用いたリスク相互依存性のモデルとの関連についても考察した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,300,000	0	1,300,000
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
総計	3,500,000	660,000	4,160,000

研究分野：統計学，確率論，数理ファイナンス

科研費の分科・細目：情報学・統計科学

キーワード：リスク管理，数理ファイナンス，金融工学

1. 研究開始当初の背景

現代のリスク管理において、リスクの計量化、すなわちリスクの特性を客観的な尺度となる数量で示すことは非常に重要な問題である。実際、2004 年 6 月に公表されたバーゼル委員会による新 BIS 規制案（バーゼル II）の第 1 の柱はリスク計測の精緻化である。

リスクの計量化の本質は、過去のデータ及び特定化された確率モデルに基づき、損益を表す確率変数の分布、あるいはその特性値を定めることにある。ただし、測定対象であるリスクは複数のリスク要因の影響を受ける変数であり、そのモデリングは容易ではない。また、リスクの種類として、市場リスクだけ

ではなく、信用リスクや流動性リスク、オペレーショナル・リスクをも考慮しなければならない。これらのリスクは違った特性を持つため、各々異なった方法でリスクを測ることが不可欠である。このような事実を背景として、バーゼル II でも、2007 年度末から先進的手法の適用が開始される。

研究開始当時、そして現在においてもバリュエーション・アット・リスク（Value at Risk、以下 VaR と略）というリスク尺度が実務では用いられている。これはリスクとして極端に大きな可能損失額を測ることを重要視しており、直観的にも理解しやすい概念ではあるが、劣加法性を満たさない、ポートフォリオを巧み

に操作して値を動かすことが可能であるなどの理論的な問題がある。

その後、その欠点をもたない期待ショートフォール (expected shortfall) というリスク尺度が注目されているが、リスク尺度は使用者の目的に依存して様々なものが要求されるため、より多くの使いやすいものがあると便利である。リスク尺度の整合性 (coherence) に加えていくつかの望ましい性質を追加して歪みリスク尺度というクラスがすでに導入されているが、それはあまりに大きなクラスであるため、そこからさらに歪み関数をパラメトライズして、具体的かつ実用的なリスク尺度を提案したいというのが本研究の動機の一つであった

そのためには、多くのリスク要因間の相互依存性 (dependence) を考慮に入れたモデリングが必要であり、そのために接合分布関数 (copula) を応用することが有力な方法である。さらに、リスク計測の重点が極端に大きな可能損失額を測るということにあることから、多変量極値理論の適用可能性を探ることが妥当であるという視点で本研究の進む方向を考えていた。

2. 研究の目的

本研究は、このリスクの計量化についてデータの構造・モデルの多様性と静的・動的の区別を考慮に入れながら、VaR あるいは期待ショートフォールの欠点を補うリスク尺度を考案し、さらにリスク管理におけるリスク資本の配分やポートフォリオ最適化、ポートフォリオ・パフォーマンス評価においてそれらを用いた場合にどういった結果が得られるか、そしてそれらのリスク尺度をどのように推定するのが望ましいのかを考察することを主要な目的としている。

そのために、本研究では測定対象のリスクの背後にあるリスク要因間の従属性と、それらの極端な測定値をモデル化する多変量極値理論に重点を置いて考察する。まず従属性については、接合分布関数を用いたモデリングを研究する。ここで、接合分布関数とは 1 次元周辺分布関数を多変量分布関数と結びつける役割を果たす関数である。これを用いた多変量モデルは確率変数間の様々な依存関係をモデル化する道具として有用であり、近年保険理論やファイナンスでのリスク管理において盛んに用いられ始めている。

ここで、異なる接合分布関数で表現される従属関係の相違は、VaR や期待ショートフォールでは適切に捉えられない場合があるという報告もある。さらに、裾が長く大きな損失が発生する可能性の高い変数であっても、VaR や平均 VaR で適切にリスクが測定され

ない場合があることが知られており、それら以外のリスク尺度を開発することは大きな意義がある。

リスク尺度の公理論的研究では整合性をもたないという VaR の欠点が明らかにされ、さらに期待ショートフォールの良さが示された。これらはすべて 1 次元の静的な場合に対してである。これに対して本研究では、背後にあるリスク要因間の従属性を明確にモデル化し、各要因が対象となるリスク計測にどのような影響を及ぼすかということを探ることに主眼がある。

さらに、動的リスク尺度においても、単一の確率過程を独立して評価するのではなく、背後にある複数の確率過程の同時挙動を考慮に入れて考えることが本研究の特色、独創的な点であると言える。

これまでの理論的研究を背景にして、その実際上の意味を明らかにしつつ実用可能なものを提案するというのが本研究の試みである。これまでの定量的リスク管理手法をさらに発展させていくのが本研究の背後にある大きな目標でもある。

接合分布関数及び多変量極値分布が市場リスクや信用リスク、オペレーショナル・リスクを表現するという目的のために適切なのかという問題も当然検証する必要がある。このためには経験過程理論を用いた理論的考察と同時に、コンピュータによるシミュレーションや実際のデータを用いた実証分析も行うことが必要である。

データ構造の多様性としては、独立同一分布データか時系列データかという問題がまず考えられる。オペレーショナル・リスクなど、ある種のリスクに関してはデータ量が絶対的に不足しており、統計的方法の適用が妥当なのかどうかを深く検討することも視野に入れていた。

3. 研究の方法

(1) 理論的なアプローチとしては、まず歪み尺度の 1 パラメータ族を導入して、それらが望ましい理論的性質をもつことを証明する。さらに、損失分布からの標本が得られる場合に、データの種類に応じてリスク尺度の値の推定方法を統計的に解析する。さらにいくつかの代表的な分布の下でのリスク尺度の振舞いを比較分析する。また、リスク尺度に制限をおいたポートフォリオの最適化や歪みリスク尺度を用いた資本配分を具体的に計算して、様々なリスク尺度族の比較検討を行う。統計理論の側面としては、独立同一分布の場合の漸近理論をまず扱い、次いでその仮定を離れ、より現実的な時系列のモデルを考える。さらには、複数の時系列を同時に考え

る多変量時系列モデル，連続時間の確率過程を考える必要がある。

接合分布関数による従属性モデリングと多変量極値分布を用いた分析については，いくつかの静的なリスク尺度を評価することから始める。理論的には，リスク要因間にいくつかの異なる接合分布関数を想定したモデルにおいて，リスク尺度の感応度・頑健性を検討する。

一方で，多変量極値理論の手法について理解を深めつつ，それに基づくリスク尺度の推定方法を多次元の経験過程理論の応用・発展を考えながら開発する。

(2) コンピュータを用いたシミュレーション及び実証分析のためには，金融データ・モデリングのために，最新の多くの手法，特に接合分布関数や極値解析を用いた関数が提供されているアドオンモジュール S+FinMetrics をインストールして使った。これには VaR や期待ショートフォールに加えて，極値分布や GARCH モデルによる分析モジュールも含まれており非常に有用であった。この S+及び MATLAB でリスク尺度推定のコードを書き，有限標本の場合にシミュレーションデータに基づく推定量の振舞いを検討し，また現実のデータから実証分析を行う。

(3) 共通の話題に関心をもつ数理ファイナンス研究者が国内に存在し，研究の進行状況によっては彼らとの共同研究に発展する可能性もあり，実際に数名の方々とリスク尺度を用いた最適化問題について研究を進めつつある。さらに国内で行われる研究集会にも積極的に参加し意見交換を行う。海外のコンファレンスにも参加し，研究発表を行い，また最新の研究状況を把握する。

4. 研究成果

(1) リスク尺度の整合性，さらには法則不変性や共単調加法性などを条件として課し，さらに期待ショートフォールとの比較可能性の条件となる半群性を加えて，歪みリスク尺度の 1 パラメータ族を導いた。それには比例ハザードや比例オッズ，ワン (Wang) 変換などのよく知られたリスク尺度を包含するものである。

そして，いくつかの確率順序に関連してそれが歪みリスク尺度の下で保存されるという性質を証明した。また，ゆがみリスク尺度の表現定理とファトゥ性が自動的に成立するという性質の別証明を与えた。

(2) 統計分析としては，まず独立同一分布データが得られたときの推定方法についてその推定量を定め，MATLAB を用いて実際に計算を行った。理論的な結果としては，推定量の漸近的な振舞いも検討したが，これはすでに過去の統計学の研究で明らかになっていることであった。また，正規分布と t 分布の場合に加えて，一般化バレート分布に対しても，VaR，期待ショートフォールとの数値的な比較を行った。その結果，裾の重い分布に対しては比例オッズ・リスク尺度が VaR と期待ショートフォールの間の値をとることが経験的に確認された。

(3) 歪みリスク尺度に対して，従属性のある時系列データに基づく自然な推定量が L 統計量となり，その漸近的な統計的性質を厳密・詳細に分析した結果，定常かつ強ミキシング性の下で大数の法則や中心極限定理が成り立つための条件を明確に述べることに成功した。それはミキシング収束の速さに関するものであるが，これまでの研究で得られているものを若干改善した結果となっている。さらに，ファイナンスデータに良く適合するとされる GARCH モデルを用いてシミュレーションを行い，この場合には理論的に得られた漸近正規性がある程度の標本数で実現されていることやここでも比例オッズ・リスク尺度が統計的扱いやすさを有していることが示された。

(4) 歪みリスク尺度と多変量極値理論を関連付けて考察することまでは手が回らなかったが(その分野の専門家の手を借りるべきであった)，これは今後の課題とする。歪みリスク尺度に基づく資本配分を考える上で，接合分布関数が重要な役割を果たすことが示され，具体的な計算を行った。しかし，統一的な理論にまでは至っていない。歪み尺度を用いたポートフォリオ最適化についても状況は同様で，個々の従属性(接合分布関数)の特定化の下で計算をすることはできたが，その数値理論上の効率性や既存の理論との関連，さらにはポートフォリオ運用実績評価への応用などについては今後の課題として残った。

(5) 様々なリスクの従属性を分析するための鍵である接合分布関数については，2005 年に応用統計学会の雑誌に掲載された論文にさらなる考察・教育的配慮を加え，大幅に加筆・修正を施した概説論文を執筆した。これに関して，生存解析への応用論文を現在執筆

中であり、これは将来的には信用リスク分析の分野への応用が期待できるものと考えている。

(6) 塚原を記者代表としたグループで進行していた、"Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools"の邦訳作業が終了し、2008年7月に「定量的リスク管理：基礎概念と数理技法」として共立出版から出版された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Hideatsu Tsukahara, One-parameter families of distortion risk measures, to appear in *Mathematical Finance* (2009) [accepted]. 査読有り

Hideatsu Tsukahara, Some properties of distortion risk measures, *Advances in Mathematical Economics*, vol.12, 153-166 (2009). 査読有り

塚原英敦, 「デフォルトの起こり得る証券のモデル化と価格付け理論について」, 成城大学経済研究, 182号, 43-56 (2008). 査読無し

塚原英敦, 「接合分布関数(コピュラ)の理論と応用」, 北川源四郎・竹村彰通編『21世紀の統計科学 III: 数理・計算の統計科学』(東京大学出版会), 111-146 (2008). 査読有り

塚原英敦, 「リスク尺度 理論と統計手法」, リスクと保険, Vol.3, 3-19 (2007). 査読有り

Hideatsu Tsukahara, On the convergence of measurable processes and prediction processes, *Illinois Journal of Mathematics*, vol.51, 1231-1242 (2007). 査読有り

[学会発表](計8件)

塚原英敦, Estimation of Distortion Risk Measures, Quantitative Methods in Finance Conference, 2008年12月17日, アモラホテル・ジャミソン, シドニー.

塚原英敦, Comparative Analysis of VaR and Some Distortion Risk Measures, 中之島ワークショップ, 2008年12月7日, 大阪大学中之島センター.

塚原英敦, Estimation of Distortion Risk Measures, Bachelier Finance Society World Congress, 2008年7月18日, イン

ペリアル・カレッジ, ロンドン.

塚原英敦, Estimation of Distortion Risk Measures, 立命館国際シンポジウム "確率過程論と数理ファイナンスへの応用", 2008年3月21日, キャンパスプラザ京都.

塚原英敦, コピュラ(接合分布関数)の統計学: 最近の展開と展望, 日本統計学会春季集会, 2008年3月1日, 成城大学.

塚原英敦, Estimation of Risk Measures, JAFEE第27回大会, 2007年8月1日, 明治大学リパティタワー.

塚原英敦, リスク尺度: 理論と応用, JAFEE第26回大会, 2007年1月24日, 法政大学ボアソナード・タワー.

塚原英敦, One-parameter families of distortion risk measures, Bachelier Finance Society World Congress, 2006年8月17日, 学術総合センター.

[図書](計1件)

アレクサンダー・J・マクニール, リュディガー・フライ, ポール・エンブレヒツ著, (塚原英敦 訳者代表), 「定量的リスク管理: 基礎概念と数理技法」, 共立出版, 2008年, 627ページ.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

塚原 英敦 (TSUKAHARA HIDEATSU)

成城大学・経済学部・教授

研究者番号: 10282550