様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　６月　７日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006　～　2009
課題番号：１８５００２１９
研究課題名（和文）　確率過程に対する統計的漸近理論とその計算機実装

研究課題名（英文）　Statistical asymptotic theory for stochastic processes And its computer implementation

研究代表者
阪本　雄二　（SAKAMOTO YUJI）
神戸大学・人間発達環境学研究科・准教授
研究者番号：70215664

研究成果の概要（和文）：確率過程に対する多くの検定統計量の分布の高次漸近展開を求めた．この結果から，拡散過程に対する検定統計量の漸近展開公式が導かれた．また，小さな拡散過程やエルゴード的拡散過程に対して,主要な判別関数の誤判別確率の高精度近似公式を求めた．さらに，時変強度関数を持つ一般のマーク付き点過程の漸近展開を求め，数式処理により展開係数の陽な表現を得た．得られた各種近似公式に対して，プログラムコードを作成し，それぞれの精度を数値的に検証した．

研究成果の概要（英文）：The higher-order asymptotic expansions of many test statistics for stochastic processes are obtained, which leads to asymptotic expansion formulas of test statistics for diffusion processes. Highly accurate approximation formulas for major discriminant functions are derived in case of small or ergodic diffusion observations. Moreover, asymptotic expansions of marked point processes with time in-homogenous intensity functions are obtained, and using the mathematical formula manipulation, explicit expression of the coefficients in the expansions are given. Computer program for the approximation formulas obtained are coded, and their accuracy is measured numerically.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,200,000	0	1,200,000
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,600,000	720,000	4,320,000

研究分野：数理統計学
科研費の分科・細目：情報学・統計科学
キーワード：統計的推測，時系列解析，モデル選択，数理ファイナンス

１．研究開始当初の背景
連続時間径数を持つ確率過程の中で広く応用されているものは，マーク付き点過程と拡散過程であるが，前者の高次漸近理論を含む統計的推測理論は，Kutoyants(1998) などの結果より，一般論が完成したと言っても良い

状況にある．拡散過程については，Prakasa Rao(1999) などが連続観測および離散観測の推定問題に対する１次の漸近理論を与え，さらに，Yoshida (1992) および Sakamoto-Yoshida(1998)， Sakamoto(2000) などが連続観測の推定・検定問題に対する高次漸近理論を発展させた.

しかしながら，実際に観測されるデータが離散的であることから，これまでの連続観測に対する結果を応用する際，サンプリング精度と観測時間の長さ・拡散の大きさの関係が問題となる．また，音声認識やゲノム解析，金融工学，脳波解析など様々な分野で用いられている隠れマルコフモデルに対しては，最尤推定量の漸近正規性さえ証明されておらず，種々のフィルタリング手法による推定量の有効性は証明されていない．さらに，これまで研究されてきた拡散過程は主にジャンプを持たないものであったが，レビー過程を用いたモデリングが金融工学などの分野で盛んになっており(Barndorff-Nielsen(1998), (2000) など)，ジャンプを持つ拡散過程に対する漸近理論が必要とされている.

拡散過程をモデルとして用いる分野の中で，金融工学における数学的側面を取り扱う数理ファイナンスが近年盛んに研究されている．そこでは，金融取引の無裁定理論および価格均衡理論が展開され，金融派生商品に対する価格付け法が提案されている．また，実際の市場においてもそうした価格付け法が利用されるようになり，より現実的なモデリングや価格付け公式に対する数値手計算手法の開発の需要が非常に高い．しかしながら，そこで用いられるモデルの同定には，数理統計学的手法(推定・検定・モデル選択・判別分析・主成分分析など)を用いられることはなかった.

２．研究の目的

本研究では，(1) 離散観測に基づく拡散モデルに対する M 推定量の漸近展開の導出，(2) 隠れマルコフモデルに対する推定量の漸近正規性の証明および漸近展開の導出，(3) ジャンプを持つ拡散過程の擬似最尤推定量および尤度に基づく検定統計量の漸近展開の導出，(4) 様々な株価・金利・割引債に基づく金融派生商品の価格に対する統計的推定・検定理論の構築，(5) 拡散過程の判別分析法の構築，(6) 推定・検定・判別分析の各種手法の計算機への実装を目標とする.

(1) 離散観測に基づく拡散モデルの推測問題は，推定量の極限分布が種々の条件のもとで求められている：(a) 観測間隔が短く観測時間が長い場合 (Yoshida(1992), Kessler(1997))，(b)観測間隔が短く観測時間が長くない場合，(c) 観測間隔が一定で観測時間が長い場合(Bibby&Sorense(1995))．(a) の場合については，観測間隔と観測時間の２つのパラメータに関する漸近展開を同時に求める．これにより，推定量が漸近有効性を保つために必要な，観測間隔(サンプリング精度)と観測時間の長さの関係が明らかになる． (b) の場合は，拡散係数の形状により推定量の極限分布が正規分布である場合と混合正規分布である場合に大別される．どちらの場合についても２次の漸近展開を求め，ボラティリティーの推測に有効な推定関数の構築をする．(c) の場合は，M 推定量の 2 次以上の漸近展開を求め，ミニマックスの意味の高次漸近有効性を証明する．これにより，時系列モデルによる推測法との優位性が明らかになる.

(2) 非観測過程がマルコフ性を持つものを総称して，隠れマルコフモデルと呼ぶが，離間時間確率過程である時系列と拡散過程のような連続時間確率過程に大別される．しかしながら，最尤推定量の漸近正規性に関しては，どちらも同じ確率構造が問題となる．したがって，隠れマルコフモデルに共通の一般的な確率構造を仮定して，最尤推定量の漸近正規性を証明し，その漸近展開を求める．これにより，カルマンフィルタやモンテカルロフィルタによる最尤推定量の有効性が証明される.

(3) ジャンプを持つ拡散過程については，その尤度の表現・近似法がまず問題となる．ここでは，Jacod-Shiryaev(1987) による表現を用いて，エルゴード的である場合とノイズが小さい場合の最尤推定量の漸近正規性を証明する．さらに，2 次の漸近展開を求め，漸近有効性を証明する．これにより，ジャンプを持たない場合を含め，一般の拡散過程に対する漸近推測理論が完成される.

(4) 金融派生商品の中でも，満期までの価格過程の汎関数として表されるタイプ(広い意味のヨーロピアンタイプ) は，同値マルチンゲール測度による平均値として表現され，数学的な取扱いが比較的容易である．ここでは，ヨーロピアンタイプの派生商品の価格について推定・検定問題を考え，拡散過程に対する漸近展開を用いて，その高次漸近特性を明らかにする．具体的には，派生商品の対象商品の現在価格と行使価格の関係により，価格推定がバイアスを持つかどうかを明らかにする．これにより，実際の市場における適正価格の統計的推測法が確立され，広く利用されることが期待される.

(5) 拡散過程に対する判別分析では，ベイズ型やプラグイン型，または，尤度比型のいずれもその分布形は明らかではなく，適当な近似法を用いないと誤判別確率を評価することはできない．まず，判別対象の標本と学習標本から多くの情報が得られる場合について，誤判別確率の近似公式を導出すること

を試みる．また，各種の判別法の比較のために，判別対象が非常に似通っている場合について，誤判別確率の近似公式を導き，それらの比較を行う．さらに，母集団が既知である場合は，ベイズ型が最適であるので，母集団が未知である場合に用いるプラグイン型と尤度比型の双方に関して，ベイズ型との差を近似公式を使って比較検討する．これらの結果には，地震波と核実験波の区別，会社の格付けなど多岐に渡る応用が期待される．

(6) まず，拡散過程の離散観測に基づく一次の漸近理論に基づく，点推定・区間推定・仮説検定・情報量基準に基づくモデル選択を実行するプログラムを開発し，広範の利用者を持つ統計パッケージ R, Jump, SPSS などから利用可能な形で計算機に実装する．さらに，2 次の漸近展開を利用して，バートレット修正を含むバイアス修正統計量，信頼度・有意水準の修正，コーニッシュ・フィッシャー展開に基づく臨界点の修正などのプログラムを開発し，それらを汎用的な統計パッケージから利用可能にする．ジャンプを持つ拡散過程については，離散幅とジャンプの検出の間に複雑な関係を持つため，まず，ジャンプフィルターの開発を行う．その後に，ジャンプを持つ拡散過程の推定問題・検定問題に関するプログラムを開発し，汎用プログラムから利用可能な形で計算機に実装する．

３．研究の方法

まず，ジャンプを持たない拡散過程に対して強ミキシング性を仮定して，観測時間の長い場合の検定統計量の漸近展開を求めることにする．同様の条件のもとで，研究代表者(1998)は M 推定量の漸近展開を求めたが，その時，推定量の確率展開を構成する確率変数の同時分布に対する漸近展開から，Bhattacharya-Ghosh 写像と呼ばれる推定量への写像およびテーラー展開を用いて，対象の推定量の漸近展開を求めた．同様の方法で，検定統計量の確率展開を構成する確率変数から検定統計量への写像を構成し，その写像を用いて検定統計量の漸近展開を求める．本研究では，多次元拡散過程の多母数モデルを扱うため，漸近展開の正確な表現を得るためには，相当複雑なテンソル計算が必要となることが予想される．また，結果として得られる漸近展開の係数は，拡散過程の漸近キュミュラントから作られると考えられるが，それらは拡散過程の生成作用素のグリーン関数で表され，具体的な拡散過程に対して陽に表現することは一般に困難である．したがって，導かれた漸近展開を具体的な市場モデルや脳波モデル，音声伝達モデルの同定に用いる場合は，グリーン関数を数値的に求める必要がある．

本研究では，検定統計量の漸近展開の一般的な表現を得るために必要なテンソル計算を，数式処理技術を利用して遂行することにする．これまでの経験から，手計算による時間は少なくとも２～３ヶ月はかかることが予想されるが，数式処理技術を利用することで，大幅に時間短縮され，より信頼性の高い結果が得られるものと思われる．したがって，漸近展開の正確な表現を短時間で得るために，数式処理ソフトが不可欠であり，それが稼働する高速で大容量の記憶装置を持つ PC ワークステーションが必要である．また，グリーン関数の数値計算を有限差分法またはモンテカルロ法で行うために，設備備品の明細にあげたような PC ワークステーションのセットが有効に活用される．私の現在の計算機環境は，研究発表および講義のプレゼンテーション専用のノートパソコンと 5 年前に購入された事務処理用デスクトップパソコンですが，それらはモンテカルロシミュレーションや数式処理を行うためには処理速度および記憶容量が極めて不十分であり，研究用の計算専用でもありません．また，数式処理ソフト自身も現在保有していないため，本調書において申請した，PC ワークステーションセットおよび数式処理ソフトは，本課題の追考において必要不可欠です．

ジャンプを持つ拡散過程に対しては，Bichteler ら (1987) による Malliavin 解析を用いると，汎関数に対する部分積分公式を利用することができる．観測時間が長い場合は，マルコフ性を利用して特性関数を細分化された観測間隔上の特性関数の積にするという，いわゆるリダクション法により，分布の非退化性(リーマン・ルベーグの定理)を証明する．その局所化された特性関数に部分積分公式を適用することで，それが可能であると予想される． また，ノイズが小さいジャンプを持つ拡散過程は，ウィナー過程によるノイズが小さい場合，点過程によるノイズが小さい場合，どちらも小さい場合に分けられるが，いずれの場合についても考察する．Yoshida(1992) は，ジャンプがないノイズの小さい拡散過程の漸近展開を扱っているが，そこでは，Malliavin-Watanabe 理論に従い，ウィナー過程の汎関数である推定量を無限次元空間上で定義されたソボレフ空間の元として確率展開を求め，その一般化期待値として分布の漸近展開を求めている．しかしながら，特性関数の評価を直接おこなうことで分布の滑らかさを確認することが可能であり，また，分布の漸近展開を求める場合は，平滑化穂代を用いるとその条件だけで数学的に正当な漸近展開が得られる．本研究では，Malliavin-Watanabe の理論を直接用いずに，特性関数の評価を通して漸近展開を求めることにする．

金融市場モデルとして最も簡単でよく用

いられているブラックショールズモデルは，MacBeth(1979)らによる実証研究より，アットザマネー付近でオーバープライスし，インザマネーとアウトオブザマネーでアンダープライスすることが知られている．本研究では，得られた漸近展開を用いて，統計的推定という観点からこの問題を明らかにする．また，この問題を回避するために可変ボラティリティーモデルを用いた価格付けが行われているが，無裁定理論に基づく価格は陽な表現を持たずモンテカルロ法などで数値的な近似計算がされている．しかしながら，モンテカルロ法には精度および計算速度の問題，乱数の性質の問題がつきまとうことがよく知られており，別の方法が必要とされている．本研究では，得られた漸近展開を用いて金融派生商品の価格に対する近似公式を導き，モンテカルロ法との精度の比較を行う．また，漸近展開の高次の係数に表れるキュミュラントだけモンテカルロ法を用いるハイブリッド法の精度・速度を，モンテカルロ法および漸近展開法と数値的に比較検討する．さらに，市場モデルのパラメータに関する統計的推測を基礎にした，価格の推測問題も考察する．

倒産可能性を持つ市場モデルとして，ジャンプを持つ拡散過程を考えるとき，市場は完備でなくなり，無裁定理論に基づく金融派生商品の価格付けは行えなくなる．しかしながら，市場均衡理論を利用した別の価格付け理論が研究されている．本研究では，ジャンプを持つ拡散過程に関する漸近展開の応用として，倒産可能性をもつ企業の割引債に対するリクスヘッジ問題を考え，Duffie-Singleton モデルなどにおける価格の統計的推測を考察する．

拡散過程の判別分析に関して，まず，判別対象の情報量が無限に多くなる場合について考える．これは，標本の大きさが大きくなる場合と，イノベーションノイズが小さく場合に分けられるが，それぞれについてベイズ型，プラグイン型，尤度比型のそれぞれの判別ルールの誤判別確率についてその漸近展開を求める．尤度比型の漸近展開は，簡潔には表現できないことが予想されるため，ドリフトと拡散係数の構造を母数に関して，線形か双曲型になる場合に限定して，展開係数の簡潔な表現を求める．それらから，プラグイン型と尤度比型の高次漸近的な比較を行う．イノベーションノイズが小さい場合の展開係数には，多重ウィナー積分の条件付き平均が表れることが予想されるので，その評価方法も合わせて考察する．

離散観測に基づく判別法について，Uchida(2002)などの結果を再考する．尤度の近時法として，確率微分方程式の離散近似に基づくものと推移確率の正規近似に基づくものを取り上げ，判別分析における近似精度を考察する．さらに，漸近展開を導出して，高次漸近比較を行う．

判別対象の標本と学習標本が同時に情報量を豊富に持つ場合の漸近展開は，モデルの形状がある程度簡潔でないと，極めて複雑な表現になることが予想される．そこで，プラグイン型と尤度比型の比較を行うためのアプローチとして，① 判別すべき標本の情報が有限であるときのベイズルールを基準とする漸近相対効率，② 識別すべき対象がよく似ている場合でもどのくらい識別できるのかという，局所母集団比較における識別力，の２つについて考える．どちらの場合も，誤判別確率の表現はある程度簡単になることが期待されるため，定性的な性質として，判別分析の性能比較が行える．

拡散過程に対する統計的推測理論は，漸近近似を基礎とする．したがって，確率過程に対する統計手法のプログラミングでは，拡散過程の漸近キュミュラントをモデルごとに求めるアルゴリズムが必要となる．ドリフトや拡散係数の形状をある程度限定して，漸近キュミュラントの陽なる表現をモデルごとに求めて，それらのモデルごとに統計的なデータ解析法のプログラムを製作する．特に，離散観測に対する推測について，エルゴード的である場合と，小さな拡散である場合の，どちらの場合にも，プログラムを作成する．また，ドリフトや拡散係数を解析者が自由に設定できるようなプログラムの開発も行う．その場合，尤度の母数に関する微分やそれらの時間積分が統計的推測を行うためには必要となるが，ドリフトと拡散係数を与えるだけで，そのような微積分を行うシステムを構築する．

プログラムの開発はＣ言語で行うが，作られた各モジュールを，R, S, SPSS, JUMP, SAS などの汎用的な統計パッケージが利用できるようなインターフェースの開発も同時に行う．また，ドリフトや拡散係数の微積分が必要となる場合，数値的に計算を進める方法と数式処理的に行う方法があるが，どちらの場合についてもプログラムを作成する．数式処理的に行うときは，Mathematica や Maple などの商用ソフトを外部コマンドとして利用する形のプログラムを組むことにする．

４．研究成果

観測時間が長いエルゴード性を持つ拡散過程に対しては，尤度比検定統計量，ワルド統計量，ラオ統計量など多くの検定統計量が漸近同等であることを示し，それらの分布関数の 3 次の漸近展開を求めた．この結果は，拡散過程のみならず，多くの確率過程に応用可能な形式で表現されており，また，母数の次元を任意のままで得られており，独立同一

分布の標本に対する母数の次元が１次元のこれまでの結果を大きく発展させたものである．尤度比統計量とワルド統計量，ラオ統計量のこれまでの高次有効性比較が，多次元母数の時は，成立しないことが明らかになった．

隠れマルコフモデルに関しては，混合性が統計量に遺伝することを証明し，モーメント推定量の２次の漸近展開を求め，さらに，具体的なモデルに対して，展開係数を数式処理を用いて明示した．コンピュータシミュレーションの結果，求められた漸近展開は高精度な確率分布の近似公式であり，それを用いて公称の信頼係数を保証する信頼区間を構成できることが分かった．

さらに，小さな拡散過程に対して，ベイズ判別関数，プラグイン判別関数，および，尤度比判別関数の 2 次の漸近展開を求めた.エルゴード的な拡散過程に対しても，同じ結果を得て，数値実験の結果，誤判別確率の高精度評価が可能となった．

また，状態空間が一般の空間の強度関数が時間的に一様でないマーク付き点過程の漸近展開の 2 次の漸近展開を求めた.その実用的な例として,拡散過程をマークとし，その関数により強度が決まるマーク付きポアソン過程やウィーナー過程による移動平均過程の２次の漸近展開について，その展開係数を数式処理を用いて陽に表すことに成功した．

これらの一部は，以下に揚げる査読付き論文に掲載済みであり，残りの成果に関しても投稿準備中である.また，各種数値実験で得られた，プログラムを統計処理ソフトＲのサブルーチンとして書き換える準備を進めている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Sakamoto,Y. and Yoshida,N. Asymptotic Expansion for Functionals of a Marked Point Process. Communications in Statistics. 査読有, vol. 39, 2010, 1449-1465
② Sakamoto,Y. and Yoshida,N. Asymptotic Expansion for Stochastic Processes, Journal of Japan Statistical Society, 査読有, vol.3, 2008, pp.173-185

〔学会発表〕（計０件）

〔図書〕（計０件）

６．研究組織
(1)研究代表者

阪本　雄二（SAKAMOTO YUJI）
神戸大学・人間発達環境学研究科・准教授
研究者番号：70215664