

平成22年4月2日現在

研究種目：基盤研究（C）  
 研究期間：2006～2009  
 課題番号：18500655  
 研究課題名（和文） 数学的活動のバランスを重視した中学校数学科カリキュラムの開発  
 研究課題名（英文） Curriculum Development of Junior High School Mathematics  
 Focusing on the Balance of Mathematical Activity  
 研究代表者  
 池田敏和（IKEDA TOSHIKAZU）  
 横浜国立大学・教育人間科学部・教授  
 研究者番号：70212777

## 研究成果の概要（和文）：

数学的活動のバランスといったとき、活動の種類バランス、活動と知識獲得とのバランスの2点が考えられる。前者に関しては、実世界の問題を数学の世界へと数学化して解決・解釈・検討していく活動と、数学の世界で生じた問題を発展・統合して体系化していく活動とのバランスが重要となる。後者に関しては、活動と知識獲得を分離するのではなく、活動を通して知識が獲得される過程に焦点を当てる必要がある。数学科カリキュラムは、革命的な知識獲得が節目になって要所要所に位置づけられ、その節目と節目の間で累積的な知識獲得がなされる。

## 研究成果の概要（英文）：

Two types of balances can be considered when we consider how to balance mathematical activity in mathematics curriculum. First is the balance among the variety of types of mathematical activity, and the second is the balance between mathematical activity and constructing mathematical knowledge. Regarding the former aspect, the balance between mathematical modelling and 'pure' mathematical activity should be considered. Regarding the latter aspect, students' self-motivating process to acquire mathematical knowledge through their own mathematical activity should be emphasized. Revolutionary process to acquire mathematical knowledge should be located intentionally in the turning point of mathematics curriculum, and the cumulative process to acquire mathematical knowledge is located between the turning points of mathematics curriculum.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	700,000	0	700,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	2,900,000	660,000	3,560,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：科学教育

キーワード：数学的活動

## 1. 研究開始当初の背景

数学的モデリングに関する研究は、1990年以降、課題学習・選択学習・総合学習等の導入、テクノロジーの利用、それに伴う多くの課題開発等に伴い、多様なねらいから幅広く実践されるようになってきた。しかし、その反動として、学習内容を「日常生活と関係している」かどうかという考え方で判断し、数学的内容を深め発展する学習を軽視する傾向も増え始め、卑近な実用主義がまかり通ってしまう危険性が指摘されている。このような状況の中で、今後の数学教育においては、取り扱う数学的活動のバランスを考慮に入れたカリキュラム開発が求められる。

## 2. 研究の目的

研究の目的は、以下の3点である。

- (1) 数学的活動の性格を明らかにすると共に、そのバランスをいかなる意味で解釈して考えていくことが有効かを明らかにする。
- (2) 上記(1)で捉えた数学的活動のバランスについて、いかに数学科カリキュラムの中でバランスを図っていけばよいかを理念的に明らかにする。
- (3) 上記(2)に基づく教材を開発する。

## 3. 研究の方法

研究目的を達成するために、以下の手順で研究を進める。

- (1) 先行研究を基に、数学的活動がどのように解釈されてきたかを分析し、その性格を明らかにする。
- (2) 数学的活動のバランスを、「活動の種類」と「活動と知識獲得との関連性」といった2つの観点から分析し、数学的活動のバランスの意味を明らかにする。
- (3) 上記(2)で特定した数学的活動のバランスの「活動の種類」について、どのような種類の活動をいかにバランスよく取り扱っていけばよいかを分析・考察する。
- (4) 上記(2)で特定した数学的活動のバランスの「活動と知識獲得との関連性」について、活動と知識獲得との関連性を明らかにすると共に、活動から知識を獲得する際の学習の枠組みについて構想する。
- (5) 上記(3)、(4)で明らかにした方針について、教材開発を通して具体化する。

## 4. 研究成果

研究成果は、下記の5点である。

- (1) 数学的活動の概念には、その基本的な構成要素として、「主体性」、「社会性」が内包されている。そして、注目すべき数学的活動の性格として、次の4点が特定された。
- ① 数学的構造を内包した具体の中での豊富な活動を行い、背後にある構造をみとり表現することで抽象化が促進される。

- ② 数学的活動にはこれまで獲得した数学的知識が根底から覆され拡張されたり統合されたりする活動と、これまで獲得した数学的知識を総動員して用いることで解決可能な問題場面を広げていく活動がある。

- ③ どんな数学的活動においてもその所産として数学的知識が成長している。

- ④ 数学的活動により次の学習に関わりのある新たな目的や問いが生成される。ただし、意図しないものも同時に生成される。

(2) 数学的活動のバランスといったとき、まずは、活動の種類バランスが考えられる。そこでは、実世界の問題を数学の世界へと数学化して解決し、得られた結果を解釈・検討していく活動(数学的モデリング・応用)と、数学の世界で生じた問題を発展・統合して体系化していく活動とのバランスが重要となる。どちらかに偏ることなく、数学の実用性といった観点と、数学の普遍性といった観点の両方に焦点を当てていく必要がある。

(3) 数学的モデリング・応用の指導を行う上で、教師が考慮に入れるべき点として次の6点が明らかにされた。

- ① モデリングの理解、自分でモデリングしてみること

モデリングの指導が難しい理由の一つに、教師自身がこれまでモデリングを学習していないこと、指導を受けていないことがある。まずは自分で教材づくりをしてみることで、また、モデリングにおいてどのような考え方が重要になるのかを自分なりに明確にしておくことが肝要である。

- ② モデリングの位置づけ、ねらいの明確化  
モデリングをどのような意図で用いるかを明確にしておかないと、指導のねらいが曖昧になる。例えば、次の3通りを念頭に入れておくとよい。

- ・ 数学的概念の形成を主眼
- ・ モデリング自体を主眼
- ・ 数学と他領域との関連づけを主眼

これら3つの立場は、優先順位の違いによって区別される。実際の指導では、これらの3つの中の複数をねらいとして設定して指導されることもある。ただし、授業を構想する上で、何を第1のねらいとしているかその優先順位を明確にしておかないと、授業の焦点がぼやけてしまう危険性がある。

- ③ 取り扱う問題の分析

下記の3点に留意して分析する必要がある。

- ・ 指導目標と教材との整合性
- ・ 取り扱う問題の現実性はどうか
- ・ 要求される数学的知識・技能と考え方の特定

- ④ 生徒はどう考えるかの把握

生徒の陥りがちな一般的な傾向を探っていくと共に、取り扱う問題において、具体的に生徒はどのように考えるのかを予想して

おくことが肝要である。

#### ⑤ 授業展開の計画・立案

モデリングの指導展開、問題の提示方法を計画・立案する上で、例えば、下記のような点を検討する必要がある。

- ・モデリング全過程か、特定の段階だけか
- ・生徒に数学化させるか、解釈させるのか
- ・教師はどのような場面で介入するのか

#### ⑥ 生徒の達成度の評価

モデリングの達成度の評価は、モデリングのねらいに依存する。授業の中で生徒の考え方をどのように価値付けるか、また、授業の後で生徒の達成度をいかに把握するかを考えておく必要がある。例えば、授業後のモデリングを促進する考え方の評価に焦点を当てた場合、①特定の問題による考え方の評価、②一般的記述による考え方の評価に大別でき、①では、特定の段階に焦点を当てた評価とモデリング全過程に焦点を当てた評価、②では、レポート評価が主な方法として考えられる。

(4) 数学の世界で生じた問題を発展・統合して体系化していく活動に関しては、例えば、数学的知識を拡張していく過程に関して、次のようなプロセスに焦点を当てる必要性のあることが明らかにされた。

- ①活動Ⅰ：ある特定の問題場面で成り立つ性質、適用できる手法等を特定する活動  
獲得される知識：どういう問題場面で、どのような性質、手法等が成り立ったり、適用できたりするのかがわかる。
- ②活動Ⅱ：ある特定の問題場面で成り立つ性質、適用できる手法等が、他の問題場面でも成り立ったり、適用できたりしないかを探る活動  
獲得される知識：最初の問題場面に限らず他の問題場面でも、見いだした性質や手法等が成り立ったり適用できたりすることがわかる。
- ③活動Ⅲ：ある特定の問題場面で成り立った性質、適用できた手法等が、どの範囲まで成り立ったり適用できたりするのか、逆に、どの範囲から成り立たなかったり適用できなかったりするのか、その境界を明らかにする活動  
獲得される知識：ある性質、手法等が成り立ったり適用できたりする範囲がわかる。その結果、境界線が明確になる。
- ④活動Ⅳ：ある性質、手法等が成り立たなかったり適用できなかったりする問題場面でも、見方を変えることで、全ての場合において成り立ったり適用できたりしないかを探る活動  
獲得される知識：見方を変えることによって、より広い範囲で拡張された性質や手法等が適用可能であることがわかる。  
これらの4つは、前の活動がないと次の活

動に進めないのが段階として捉えることができる。活動Ⅰ、Ⅱ、Ⅲは、累積的な知識獲得に対応しており、活動Ⅳまで進んだとき、革命的知識獲得と捉えることができる。革命的知識獲得は、累積的な知識獲得が前提となっている点に注意する必要がある。

(5) 数学的活動のバランスのもう一つの側面は、数学的活動と数学的知識獲得との関連性である。モデル主義という概念を基に数学教育を展開していく学習理論の枠組みが開発された。下記の通りである。

数学的活動と概念形成とを関連づけるためには、問題を解決することだけで終始することなく、児童・生徒の内的な世界に数学をつくりあげていくことを目標とする必要がある。具体的な世界（主に現実世界）で生じた問題を解決することが目的か、抽象的な世界で生じた問題を解決することが目的かを見きわめ、「互いが互いを成長させる」がモデル主義の核心となる。具体的な世界の問題を解決するために、児童・生徒の内的な世界に抽象化モデル（数学的モデル）がつくられ、つくられた抽象化モデルの適用範囲を広げたり、部分（構成要素）としての抽象化モデル同士の間関係を明らかにしたりすることで、抽象的な世界に数学というシステムを構築していくことになる。モデル主義に基づく数学教育の特徴として、下記の点をあげられる。

- ①現在の数学教育では、児童・生徒にとって「現実→算数・数学」という流れを中心に、数学概念の構成を意図している傾向にある。しかし、モデル主義では、「現実→算数・数学」と「算数・数学→現実」といった流れを相互に関連されながら、児童・生徒の内的な世界に数学を構築していくことを意図している。
- ②モデル主義における数学教育の展開では、拡張、統合のプロセス、単純化、特殊化のプロセスが、当然のプロセスとして学習展開に組み込まれる。数学的知識は、直線的累積的に成長していくのではなく、ある時は急激な変化で革命的に変化することが当然の帰結として強調される。
- ③抽象化モデルは、当初対象としていた内容以外の、未だ気づいていない内容を具体的な世界に内包していることを暗示している。また逆に、抽象的な世界での考察を、具体的な世界で意味づける行為は、2つの世界の関連性を構築していることであり、両方の世界をいったりきたりすることで、その本質を明らかにすることができる。

#### 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計8件) (査読有 計6件)

(1) Toshikazu Ikeda (2009)

Didactical Reflections on the teaching of mathematical modelling – Suggestions

from concepts of “time” and “place” -, Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics, In Morten Blomhøj and Susana Carreira, Roskilde University, Department of Science, Systems and Models, IMFUFA tekst nr. 461, pp.217-228. (査読有り)

(2) Toshikazu Ikeda (2008)

Reaction to M. Niss' s plenary talk - Perspectives on the balance between applications and modelling and ‘pure’ mathematics in the teaching and learning of mathematics. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), The first century of the International Commission on Mathematical Instruction(1908-2008) Reflecting and shaping the world of mathematics education. Rome: Enciclopedia Italiana. pp.85-90. (査読あり)

(3) 池田敏和 (2008)

数学的活動を再考するーその性格と意図ー, 日本数学教育学会誌, 第90巻 第9号, pp. 56-64.

(4) 池田敏和 (2007)

数学的活動を軸とした数学的概念の構成に関する基礎的考察, ー小中の一貫教育を意図したカリキュラム開発ー第40回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, pp. 199-204. (査読あり)

(5) 池田敏和 (2007)

数学的モデリングと算数教育, 日本数学教育学会誌, 第89巻 第4号, pp. 2-10.

(6) Toshikazu Ikeda (2007)

POSSIBILITIES AND OBSTACLES TO TEACHING APPLICATIONS AND MODELLING IN THE LOWER SECONDARY LEVEL ACROSS EIGHT COUNTRIES, Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study, edited by Werner Blum, Peter L. Galbraith, Hans-Wolfgang Henn and Mogens Niss, Springer, pp. 457-462. (査読あり)

(7) Toshikazu Ikeda and Max Stephens (2007)

A Teaching experiment in mathematical modelling using multi-choice problems, Mathematical Modelling :Education, Engineering and Economics, edited by Christopher Haines, Peter Galbraith, Werner Blum and Sanowar Khan, Horwood Publishing, pp.101-109. (査読あり)

(8) 池田敏和 (2006)

数学的モデリングを促進する考え方の指導における集団思考の取り扱い, 第39回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, pp. 109-114. (査読有り)

[学会発表] (計6件)

(1) 池田敏和 (2009)

数学的モデリングと数学的知識の構成, 日本科学教育学会年会論文集 33, 日本科学教育学会, pp.251-254, 2009年8月26日, 同志社女子大学 (京都).

(2) Toshikazu Ikeda and Max Stephens (2009)

An historical perspective on how to make connections between modelling and constructing mathematical knowledge, 第14回数学的モデリング・応用の指導の国際会議, 2009年7月26~31日, ハンブルグ大学(ドイツ)

(3) 池田敏和 (2007)

数学的モデリングの指導のポイントは何か, 数学教育学会誌 臨時増刊, 秋季例会発表論文集, 数学教育学会, pp.142-144, 2007年9月23日, 東北大学.

(4) 池田敏和 (2007)

数学的モデリングの達成度をいかに評価するかーこれまでの先行研究からの示唆, 第31回日本科学教育学会年会論文集, 日本科学教育学会, pp. 217-220, 2007年8月18日, 北海道教育大学 (札幌分校).

(5) Toshikazu Ikeda and Max Stephens (2007)

Three teaching principles for fostering students' thinking about modelling: An experimental teaching program for 9<sup>th</sup> grade students in Japan, 第13回数学的モデリング・応用の指導の国際会議, 2007年7月22日~26日, インディアナ大学 (米国).

(6) 池田敏和 (2006)

数学的モデリングを促進する考え方を育成する教育的理由, 第30回日本科学教育学会年会論文集, 日本科学教育学会, pp. 65-68, 2006年8月18日, 筑波学院大学.

[図書] (計2件)

(1) 下田好行編著 (2008), 中学校数学の教材開発・授業プラン 1年, 学事出版, 175ページ, 池田敏和執筆, 「水の増え方をグラフで表現する」, pp. 90-96.

(2) 樋口禎一・渡邊公夫・池田敏和 (2007) 数学科教育法, 牧野出版, 180ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池田 敏和 (IKEDA TOSHIKAZU)

横浜国立大学・教育人間科学部・教授

研究者番号: 70212777