様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 5 月 25 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2005～2008
課題番号：１８５１０１３５
研究課題名（和文）　不完全情報下における最小待ち行列選択モデルの性能評価

研究課題名（英文）　Performance evaluation for joining shortest queues under incomplete information

研究代表者
宮沢政清（MIYAZAWA MASAKIYO）
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号：80110948

研究成果の概要：

本研究の主な目的は，不完全情報下における最小待ち行列選択モデルについて，各種の行列長の定常分布の漸近特性を調べ，その結果をサービスシステムの運用や混雑の緩和に役立てると共に，関連した確率モデルの基礎的研究を行うことである．３年間にわたる研究により，この種の待ち行列モデルを表す一般的な確率過程として，各種の準出生死滅過程を提案し，それらの定常分布の漸近的な特性を求めた．この成果を最小待ち行列選択モデルに適用し，モデルの漸近的な特性を明らかにすることができた．また関連研究として，流体待ち行列モデルの研究も行った．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2007 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：複合新領域
科研費の分科・細目：社会システム工学・安全システム
キーワード：(1) 複数待ち行列のバランス，(2) 最小待ち行列の選択，(3) 待ち人数の定常分布，(4) 分布の裾の漸近特性，(5)２次元反射型ランダムウォーク，(6) マルコフ加法過程，(7) 国際研究者交流，(8) カナダ：ポーランド

１．研究開始当初の背景

複数待ち行列から最小の待ち行列を選んで並ぶことを最小待ち行列選択と呼ぶ．この種の問題は，交通や通信ネットワークにおける経路選択として典型的に現れる．どの程度の情報を与えれば，全体として最もよい流れを実現できるのであろうか．この問題に答えることは，社会工学，通信工学，安全工学などにおいて役立つ．しかし，数学的には複雑な問題であり，これまで，数理的な研究，特に，与えられたモデルのパラメーターから理論的に具体的な答えを得るための研究は余り行われて来なかった．

本研究では，自然なランダムさを表すために，すべての客がポアソン過程にしたがって到着すると仮定する．この場合には，不完全情報下における最小待ち行列の選択問題は複数の客のクラスがある完全情報問題に置き換えることができる．例えば，待ち行列が２つの場合には，客を１つの待ち行列しか選べないクラス（待ち行列が２つなので，２クラスある）と最小の待ち行列を選べるクラスの合計３つのクラスに分け，それぞれの到着率を指定すれば，完全情報下における最小待ち行列の選択問題となる．到着率の比率が不完全情報における確率に対応する．

この種の最小待ち行列選択モデルは，一般化最小待ち行列選択モデルと呼ばれている．待ち行列が N 個あるときには，クラスの数は 2^N-1 個であり，N が増えると，問題はきわめて複雑となる．更に，最も簡単な N = 2 でクラスが 1 つ，確率１で最小の行列を選べる（元から完全情報モデル）の場合でも，性能評価の基礎となる定常分布の解析的な解や厳密な数値計算法は知られていない．

このため，比較的に扱いやすく，定常分布の特性をよく表す量として，裾の減少率が，ポアソン到着と指数分布サービス時間をもつモデルに対して研究されてきた．しかし，一般化最小待ち行列選択モデルに対しては，大偏差値理論の一般的な枠組みを与えた論文（例えば，Puhalskii & Vladimirov (2007) [Mathematics of Operations Research 32, 700-710]参照）はあるが，減少率を具体的に求めることは，一般に困難である．

そこで，最も簡単な場合として，待ち行列が２つの場合の研究が行われてきた．この場合の一般化最小行列選択モデルについて，これまで知られている最も一般的な結果は，Foley & McDonald [The Annals of Applied Probability 11 (2001), 569-607] によるものである．彼らは，安定性条件の他に弱混合 (weakly pool) 条件と強混合 (strongly pool) 条件の２つを仮定して，定常状態の下で最小待ち行列長分布の裾の減少率が，窓口２つで待ち行列が一つの先着順モデルの利用率 ρ の２乗であることを証明した．厳密には，行列長の差の値を固定した確率の減少率が ρ^2 であることを示した．しかし，行列長の差の分布の漸近特性や，これらの条件が満たされない場合については，特殊な場合を除いて，何も知られていない．

２．研究の目的

本研究の目的は，客がある確率でしか最小の待ち行列を選ぶことができない状況（不完全情報と呼ぶ）において，この確率がどの程度大きければすべての待ち行列がうまくバランスするかを理論的に解明し，具体的な条件を得ることである．１で述べたようにこのモデルは，一般化最小待ち行列選択モデルにより表すことができる．本研究では，待ち行列が２つの一般化最小待ち行列選択モデルにおいて，定常分布の存在（安定性）を仮定し，定常分布の減少率をすべての条件下において求めることを第一の目的とした．ここに客のサービス時間分布は各窓口で同一の指数分布であるが，この指数分布は窓口ごとに異なってもよいとする．

この問題を解くために，一般化最小待ち行列選択モデルを反射壁がある２次元ランダムウォークにより表し，この反射型ランダムウォークに関する基礎的研究を行う．特に，その定常分布の裾の減少率をモデルのパラメータから計算する方法を確立する．また，関連した待ち行列への応用研究を行う．

待ち行列が３つ以上となる場合には，定常分布の減少率を求めることは極めて困難となる．そこで，時間と空間の尺度を縮小し，極限として得られる流体近似モデルにより，モデルを単純化することが考えられる．この研究のために，流体待ち行列モデルに関する基礎的な研究とその応用に関する研究を行う．

３．研究の方法

本研究は，確率過程についての理論研究を主に行う．理論研究の方法は，一般化最小行列選択待ち行列モデルをより一般的な確率過程により表し，この一般化された確率過程の定常分布の漸近特性を調べるという方法を採った．これは，個別の問題を一般化された問題の中で解決する方法である．このような方法は，問題を難しくしているとも言えるが，一方において，本質的に難しい箇所が明らかにされ，問題解決の糸口になることもある．本研究の場合もこれに相当し，問題を最終的に２重出生死滅過程（DQBD 過程）と呼ぶ確率過程（４の(2)で説明）の定常分布の漸近特性に帰着した．この問題自体も未解決の問題であったが，数理計画の手法を取り入れ，問題を最終的に制約付き２次元ベクトル値最適化問題に帰着し，解決することができた．定常分布の漸近特性は確率過程の問題であるが，本研究では，最適化理論と凸解析が問題解決に役立った．

理論研究では，先が見えないために試行錯誤することがある．このような場合には，シミュレーションや数値計算により，具体的な計算を行って，問題解決への道を探った．このために学生アルバイトに数値計算を実行してもらった．特に，一般化最小行列選択待ち行列モデルの定常分布の裾の減少率を求める際には，複雑な条件を見通しよく分類することが必要であり，この見通しを得るために数値計算が役立った．

４．研究成果

得られた結果を，発表論文ごとにわけて説明する．

(1) QBD 過程による一般化最小行列選択モデルの研究（論文[P1]の結果）

最小待ち行列長を x 座標，待ち行列の差を y 座標とすると，一般化最小行列選択モデルは，x 座標軸上に反射壁があり，y 座標軸上で推移構造が変化する２次元ランダムウォークによりモデル化することができる．このランダムウォークは，非負整数値の y 座標を加法成分，整数値の x 座標を背後状態とする反射型マルコフ加法過程と見なすことができる．特に，加法成分の推移が 0,±1 の３つの値しか取らない場合を，準出生死滅（quasi birth and death，略して，QBD）過程と呼ぶ．

QBD 過程については，定常分布が行列幾何形式で表現できること，この幾何形式を表す行列（率行列と呼ぶ）が非負行列の意味で正再帰的であるならば，境界に関するある条件を加えると定常分布の裾が幾何的に減少することが知られている．

この結果を QBD 過程によって表された行列が２つの一般化最小行列選択モデルへ適用した．ここに，最小待ち行列長を加法成分，待ち行列の差を背後状態とする．このモデルが弱混合（weakly pool）条件を満たすとき，率行列が正再帰的となる条件が強混合(strongly pool) 条件であることを明らかにした．この結果は，弱混合条件の下で，２つの待ち行列がバランスするためには，強混合条件が必要かつ十分であることを表している．次に，待ち行列の差の定常分布の裾の減少率を求めるために，加法成分と背後状態を入れ換えた 2 方向 QBD モデルの行列幾何形式について調べた．この場合の率行列は正再帰的とならないが，元のモデルの結果をうまく利用することにより，定常分布の裾の減少率を求めることができた．ただし，２つの混合条件の他にパラメータの範囲を制限するある条件が必要である．

(2)DQBD 過程の研究（論文[P3]の結果）

(1)で述べた QBD 過程において，背後過程も出生死滅過程となる場合を研究した．このモデルは x,y 軸上に反射壁を持ち，成分が非負の整数値を取る２次元のランダムウォークと見なすことができる．この確率過程は，２つの成分を入れ替えても QBD(準出生死滅) 過程であるので，２重準出生死滅（double quasi birth and death，略して，DQBD）過程と名付けた．このモデルは，QBD 過程の特殊な場合であるが，モデルの対称構造を利用して，定常分布の裾の座標軸方向への減少率を特殊な条件無しに非線形最適化問題の解として，一般的に求めることができた．このDQBD（２重準出生死滅）過程は，Borovkov & Mogulskii［Russian Math. Surveys 56 (2001), 803-916.］による反射壁を持つ一般的なランダムウォークの特殊な場合であるが，減少率を具体的に求める方法が与えられていないことと，座標軸方向の減少率や周辺分布の減少率を求めることができないなど問題が残されていた．本研究では，モデルを DQBD 過程に制限することにより，これらの問題を解決した．この結果は一般化最小行列選択待ち行列モデルに直接適用できないが，サービス係が協力してサービスを行うモデルなど，従来の方法では定常分布の特性を調べることが困難な待ち行列モデルの研究を可能にした．

(3)２方向 DQBD 過程の研究とその般化最小行列選択モデルへの応用（論文[P4]の結果）

DQBD（２重準出生死滅）過程を待ち行列が２つの一般化最小行列選択待ち行列モデルに適用するために，１つの成分の状態空間を負の整数値に広げたモデルを提唱し，２方向 DQBD 過程と名付けた．DQBD 過程に対して得られた方法を拡張し，このモデルの定常分布の裾の減少率を一般的に求めた．更に，その結果を一般化最小行列選択待ち行列モデルに適用し，減少率を弱混合や強混合条件を仮定せずに求めることができた．この研究により，待ち行列が２つの一般化最小待ち行列選択モデルの定常分布の裾が，一般的に求められ，弱混合や強混合条件の役割を明確にすることができ，２つの待ち行列がバランスする条件を得ることができた．なお，最小待ち行列長の定常分布の裾の減少率について，モデルのパラメータに応じて 17 通りの場合分けが必要であった．行列長の差については更に多くの場合分けが必要であることがわかった．

(4)レベル拡張 QBD 過程の研究（論文[P2]の結果）

QBD 過程において，加法成分の各値に対する背後過程の状態数は有限であるが，その数

が増大するモデルをレベル拡張 QBD 過程と呼び，その定常分布の減少率に関する研究を行った．基本的には，(1)の場合と同様な条件の下で減少率を求めることができた．また，この結果を生産システムの性能評価に適用した．

(5)流体待ち行列の定常分布の漸近特性（論文[P5]の結果）
これまでの 4.1 から 4.4 節の研究は幾何形式の行列解析に基づいた研究である．しかし，DQBD 過程や２方向 DQBD 過程は，待ち行列が２つの場合にしか適用できない．待ち行列が３つ以上の場合を研究するためには，何らかの意味でモデルを簡単化すること重要である．その１つの方法として，流体近似モデルに関する研究を行った．このモデルは時間と状態の尺度を１対１の比率で縮小した極限として得られる．しかし，単純に縮小するだけでは確定的なモデルとなるので，ランダムな要因を入れたモデルを考えた．その１つが有限個の背後状態がある流体待ち行列モデルである．このモデルで，バッファー容量が有限の場合に，平均損失量の漸近特性を求めた．

(6)その他の関連研究（[D7,T14]の結果）
２重 QBD モデルにおいて，加法成分の変化量が正の方向に有界でない場合についての研究を[D7]で進めている．また，[T14]では，流体待ち行列のネットワークについて，定常分布の裾の減少率を求める研究を進めている．これらは，待ち行列が３つ以上の場合の待ち行列モデルのための基礎研究である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

[P1] Hui Li, Masakiyo Miyazawa and Yiqiang Q. Zhao (2007) Geometric Decay in a QBD Process with Countable Background States with Applications to Shortest Queues, Stochastic Models 23, 413-438 (査読有り).

[P2] Liming Liu, Masakiyo Miyazawa and Yiqiang Q. Zhao (2008) Geometric Decay in Level-Expanding QBD Models, Annals of Operations Research 160, 83-98 (査読有り).

[P3] Masakiyo Miyazawa (2009) Tail Decay Rates in Double QBD Processes and Related Reflected Random Walks, to appear in Mathematics of Operations Research（査読有り）．

[P4] Masakiyo Miyazawa (2009) Two Sided DQBD Process and Solutions to the Tail Decay Rate Problem and Their Applications to the Generalized Join Shortest Queue, in Advances in Queueing Theory and Network Applications, edited by W. Yue, et al., Springer, 3-33（査読有り）．

[P5] Yutaka Sakuma and Masakiyo Miyazawa (2009) Asymptotic Behavior of Loss Rate for Feedback Finite Fluid Queue with Download Jumps, in Advances in Queueing Theory and Network Applications, edited by W. Yue, et al., Springer, 195-211（査読有り）．

〔学会発表〕（計 26 件）

国内発表（計 12 件）

[D1] 宮沢政清, Hui Li, Yiqiang Q. Zhao, Geometric Decay in a QBD Process with Countable Background States with Applications to Shortest Queues, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 待ち行列研究部会，東京工業大学，2006 年 04 月 17 日

[D2] 佐久間大，宮沢政清，谷地俊輔，Asymptotic behaviors of a loss probability for a feedback fluid queue with a finite buffer，待ち行列シンポジウム，日本大学工学部，2007 年 1 月 22 日

[D3] 佐久間大，宮沢政清，Asymptotic behavior of loss rate for fluid queue with finite buffer，待ち行列シンポジウム，京都ガーデンパレス，2008 年 1 月 21 日

[D4] 佐久間大，宮沢政清，Asymptotic behaviors of the loss rate for fluid queue with finite buffer，京都コンピュータ学院，日本オペレーションズ・リサーチ春季研究発表会，2008 年 3 月 26 日

[D5] 宮沢政清，待ち行列問題への漸近的アプローチ，日本オペレーションズ・リサーチ春季研究発表会，京都コンピュータ学院，2008 年 3 月 26 日

[D6] 宮沢政清，２重 QBD 過程の減少率問題への解答とその応用，日本オペレーションズ・リサーチ学会 待ち行列研究部会，東京工業大学，2008 年 4 月 21 日

[D7] 小林正弘，宮沢政清，集団移動型ジャクソンネットワークにおける定常分布の漸近特性，札幌コンベンションセンター，日本オペレーションズ・リサーチ秋季研究発表会，札幌コンベンションセンター，2008 年 9 月 11 日

[D8] 佐久間大，最小待ち行列選択 M/PH/2 待ち行列における定常分布の漸近特性，日本オペレーションズ・リサーチ秋季研究発表会，札幌コンベンションセンター，2008 年 9 月 11 日

[D9] 佐久間大，Asymptotic behavior for many server queueing model with shortest queue discipline and jockeying，待ち行列シンポジウム，松本東急イン，2009 年 1 月 21 日

[D10] 小林正弘，佐久間大，宮沢政清，Asymptotic behavior for generalized join the shortest queue with jockeying，待ち行列シンポジウム，松本東急イン，2009 年 1 月 21 日

[D10] 宮沢政清，Tomasz Rolski，Exact asymptotics for a Levy driven tandem queue with an intermediate input，日本オペレーションズ・リサーチ春季研究発表会，筑波大学，2009 年 3 月 18 日

[D12] 佐久間大，鞍替えのある最小待ち行列選択式 M/PH/3 待ち行列における定常分布の漸近特性，日本オペレーションズ・リサーチ春季研究発表会，筑波大学，2009 年 3 月 18 日

海外発表（計 14 件）

[T1] M. Miyazawa, On Pitman's identity and its applications to queueing problems, Seminar at Carleton University, Ottawa, Canada, October 6, 2006.

[T2] M. Miyazawa, Reflected Markov additive process and its application to a buffer truncation problem in a network, Seminar at Indian Institute of Science, Bangalore, India, March 6, 2007.

[T3] M. Miyazawa, Sufficient conditions for the exact geometric tail decays in reflected discrete-time Markov additive processes, Stochastic Networks and Related Topics, Banach center, Bedlewo, Poland, May 28, 2007.

[T4] M. Miyazawa, Geometric Decay in a QBD Process with Countable Background States with Applications to a Join the Shortest Queue Model, The Fourteenth Applied Probability Society of INFORMS Conference, Eindhoven University of Technology. Eindhoven, The Netherlands, July 11, 2007.

[T5] M. Miyazawa, Doubly QBD Process and a Solution to the Tail Decay Rate Problem, The Second Asia-Pacific Symposium on Queueing Theory and Network Applications, Kobe International Conference Center, Kobe, Japan,
August 2, 2007.

[T6] Yutaka Sakuma, Masakiyo Miyazawa, Asymptotic Behavior of the Loss Probability for a Feedback Finite Fluid Queue With Downward Jumps, The Second Asia-Pacific Symposium on Queueing Theory and Network Applications, Kobe International Conference Center, Kobe, Japan, August 2, 2007.

[T7] M. Miyazawa, Answers to the tail decay rate problem for a reflected random walk on a positive quadrant, Applied Probability Workshop at Georgia Institute of Technology, Atlanta, U.S.A., February 20, 2008.

[T8] Yutaka Sakuma, Masakiyo Miyazawa, Asymptotic Behaviors of the Loss Rate for Fluid Queue with Finite Buffer, The Sixth International Conference on Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models, Tsinghua University, Beijing, China, June June 11, 2008.

[T9] M. Miyazawa, Solutions to the Tail Decay Rate Problem in Two Sided Doubly QBD and Their Applications to the Generalized Join Shortest Queue, The Sixth International Conference on Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models, Tsinghua University, Beijing, China, June June 12, 2008.

[T10] M. Miyazawa and Y.Q. Zhao, Invariant Measures of a Feynman-Kac Transform for Doubly M/G/1 Type Process, The Third Asia-Pacific Symposium on Queueing Theory and Network Applications, Academia Sinica, Taipei, July 31, 2008.

[T11] Y. Sakuma, Decay rate for M/PH/2 with shortest queue discipline, The Third Asia-Pacific Symposium on Queueing Theory and Network Applications, Academia Sinica, Taipei, July 31, 2008.

[T12] M. Miyazawa, Tail Decay Rates in Double QBD Processes and Their Applications to a Two Node Jackson Network with Server Cooperation, Seminar at Dong Hwa University, Hualien, Taiwan, October 8, 2008

[T13] M. Miyazawa, Tractable Solutions for Tail Decay Rates in 0-Partially Homogenous Chains and Their Applications, Applied Probability Workshop, Chitou Youth Activity Center, Taiwan, October 10, 2008.

[T14] M. Miyazawa and T. Rolski, Exact asymptotics for a Levy-driven tandem queue with an intermediate input, Conference on queueing theory on the occasion of the first paper on queueing by A.K. Erlang, Copenhagen, April 2, 2009.

〔図書〕（計 1 件）

宮沢政清, 待ち行列の数理とその応用, 牧野書店, 2006, 341 ページ.

〔その他〕
ホームページ：
http://queue3.is.noda.tus.ac.jp/miyazawa/

６．研究組織

(1)研究代表者
宮沢政清（MIYAZAWA MASAKIYO）
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号：80110948

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
佐久間大（SAKUMA YUTAKA）
東京理科大学・理工学部・助教
研究者番号：00434027

(4)海外研究協力者
Tomasz Rolski
Wroclaw University 教授
ポーランド

Yiqiang Q. Zhao
Carleton University 教授
カナダ

Bert Zwart
CWI（国立研究所）研究員
オランダ