

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006-2009

課題番号：18540008

研究課題名 (和文) ホップ代数とその量子代数学への応用

研究課題名 (英文) Hopf algebras and their applications to quantum algebra

研究代表者

竹内 光弘 (TAKEUCHI MITSUHIRO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授

研究者番号：00015950

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論

1. 研究計画の概要

近年における量子群論の成功を踏まえ、群論のみならず、数論・代数幾何・環論にわたる代数学全体の量子化へ向けた試みを研究する。具体的には

- (1) coring やホップ代数を用いたガロア理論の量子化としてのホップ・ガロア理論
- (2) 研究代表者の開発した超代数理論の量子化
- (3) 量子群を用いた森田竹内理論
- (4) ホップ代数の matched pair, 双接合積、組紐ホップ代数、特に Nichols 代数についての未解決の問題
- (5) Picard-Vessiot 理論のホップ代数及び量子群を用いた一般化

等を研究する。

2. 研究の進捗状況

前項の項目番号に即して本研究の進捗状況を述べる。

- (1) coring やホップ代数を用いたホップ・ガロア理論としては S.Caenepeel, S.Crivei, A.Marcus とともに H 森田理論を詳しく研究した。ここでは、あるホップ代数 H を固定して色々な H 余加群代数を考え、それらの間の森田同値を考えるために H 森田コンテキストの概念を導入する。H とその上の余加群代数 A から決まる (A, H) 双加群のカテゴリリーの間の同値と H 森田コンテキストの興味深い関係を軸に考察しえられた結果を Journal of Algebra に発表した。
- (2) 超代数理論の量子化については、研

究代表者が 1994 年に Proc.Symp.Pure Math. に発表した $SL(2)$ の q -アナログの超代数についての考察を深め $SL(n)$ に一般化する方向で現在研究中である。

- (3) (1) で述べた H 森田理論は量子群を用いた森田竹内理論と密接な関わりがある。森田竹内理論への応用については現在研究中である。
- (4) matched pair, 双接合積、組紐ホップ代数等については、ベクトル空間 V 上の、4 項関係式をみたす無限小組紐変換 t から、いわゆる FRT (Faddeev, Reshetikhin, Takhtajan) 構成と双対的な方法によりある余可換ホップ代数が構成できることを見出した。このことにより対 (V, t) をある無限小対称カテゴリーに埋め込むことが出来、Drinfeld associator を用いて V のテンソル冪の上に組紐群の表現が生じる。現在この表現について詳しく研究中である。
- (5) ホップ代数を用いた Picard-Vessiot 理論の一般化について天野勝利、増岡彰と共同研究を行いその成果を共著論文として Handbook of Algebra に投稿し掲載を受理された。ここで用いられるホップ代数は可換であるが、それを非可換つまり量子群に拡張することは現在研究中である。

3. 現在までの達成度

- ①当初の計画以上に進展している。

(理由) (1) から (5) までの 5 項目の内、(1)、(3)、(5) について上に述べたように大きな成果を挙げ論文を発表または投稿し掲載を受理されている。(4) についても成果を挙げ、現在研究中である。当初の計画を相当上回るペースで研究は進んでおり、当初予想していなかった事実もかなり明らかになってきている。

4. 今後の研究の推進方策

項目 2. で述べた現在進行中の研究を実行するとともに、ホップ・ガロア理論をさらに推し進めるため、いわゆる **bialgebroid** (研究代表者が 1977 年にに見出した概念) 及び **Hopf algebroid** について **dynamical Yang-Baxter maps** に対する **FRT** 構成への応用等を北大の渋川陽一と共同研究中であり、共著論文を計画している。そのほか非可換環の代数幾何学を展開するため準備的研究をさらに推進する。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

① H.Nishimura, Curvature in synthetic differential geometry of groupoids, *Beitrage Algebra Geom.*, 査読有, 49, 2008, 369-381.

② S.Caenepeel, S.Crivei, A.Marcus and M.Takeuchi, Morita equivalences induced by bimodules over Hopf-Galois extensions, *J.Algebra*, 査読有, 314, 2007, 267-302.

③ A.Masuoka, Formal groups and unipotent affine groups in non-categorical symmetry, *J.Algebra*, 査読有, 317, 2007, 226-249.

④ S.Naito and D.Sagaki, Construction of perfect crystals conjecturally corresponding to Kirillov-Reshetikhin modules over twisted quantum affine algebras, *Comm.Math.Phys.*, 査読有, 263-3, 2006, 749-787.

[学会発表] (計 1 件)

① 増岡彰、コサイクル変形としての量子包絡環、日本数学会 2008 年会、2008 年 3 月 25 日、近畿大学理学部